ZEW Dokumentation

Risikomessung mit Shortfall-Maßen

Das Programm MAMBA - Metzler Asset Management Benchmark Analyser

Olaf Korn, Michael Schröder, Andrea Szczesny, Viktor Winschel

Dokumentation Nr. 96-09

ZEW Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung GmbH

Postfach 10 34 43
D-68034 Mannheim
Telefon 0621 / 1235-01
Telefax 0621 / 1235-224

ZEW
Zentrum für Europäische
Wirtschaftsforschung GmbH

Risikomessung mit Shortfall-Maßen

Das Programm MAMBA - Metzler Asset Management Benchmark Analyser

von

Olaf Korn, Michael Schröder, Andrea Szczesny, Viktor Winschel

Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW)

November 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Im Jahre 1952 begann die Entwicklung der Portfolio-Theorie durch einen wegweisenden Artikel von Harry Markowitz.[1] Die Portfolio-Theorie und darauf aufbauende Theorien wie das Capital Asset Pricing Model haben seit dieser Zeit die Welt des Investment-Banking erobert und zählen zu den klassischen Fundamenten solider Kapitalanlageentscheidungen. Im Jahre 1952 erschien ebenfalls der Artikel von A. D. Roy, der die Grundlagen zu einem allgemeineren Konzept der Theorie der Kapitalanlage legte.[2] Roy ging davon aus, daß ein Investor dasjenige Portfolio bevorzugt, bei dem die geringste Wahrscheinlichkeit für die Unterschreitung einer gewünschten Mindestrendite besteht. Das Konzept von Roy kann damit als Vorläufer des Shortfall-Ansatzes betrachtet werden.

Der Shortfall-Ansatz hat als Ausgangspunkt, daß ein Investor unter Risiko die Möglichkeit der Unterschreitung einer Mindestrendite versteht. Im Gegensatz zur Varianz bzw. Standardabweichung wird Risiko damit nicht symmetrisch um den mittleren Ertrag einer Kapitalanlage gemessen, sondern immer nur unterhalb der gewählten Mindestrendite. Diese plausible und intuitiv leicht verständliche Auffassung von Risiko erfuhr vor allem durch die Arbeiten von Bawa eine entscheidungstheoretische Fundierung und es zeigte sich, daß der Shortfall-Ansatz als Verallgemeinerung des Markowitz-Ansatzes betrachtet werden kann.[3]

Von besonderem Interesse für den praktischen Nutzen des Shortfall-Ansatzes ist dessen Anwendbarkeit auf Optionsportfolios. Portfolios, die einen größeren Anteil an Optionen enthalten, können mit dem Markowitz-Ansatz nicht mehr zufriedenstellend analysiert werden, da die Portfoliorenditen erheblich von der Normalverteilung abweichen. Für diesen allgemeinen Fall ist jedoch der Shortfall-Ansatz gut geeignet, da seine Anwendbarkeit nicht von der Verteilung der Portfoliorenditen abhängt. Die zunehmende Verwendung von Optionen im Investment-Banking sollte daher in Zukunft zu einer stärkeren Verwendung des Shortfall-Ansatzes führen.

Dies war auch der Ausgangspunkt für die Zusammenarbeit zwischen der Metzler Investment GmbH und dem Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung. Das in dieser Dokumentation beschriebene Projekt wurde im Auftrag der Metzler Investment GmbH erstellt und von ihr finanziert. Das Projektteam am ZEW besteht aus Dipl. Stat. Olaf Korn, Dr. Michael Schröder (Projektleiter), Dipl. Wi.-Inf. Andrea Szczesny und cand. rer. pol. Viktor Winschel.

Mannheim, im November 1996

Olaf Korn, Michael Schröder, Andrea Szczesny, Viktor Winschel

---

[1] Markowitz (1952).

[2] Roy (1952).

[3] Vgl. z.B. Bawa (1975), Harlow/Rao (1989).

2 Risikomessung mit Shortfall–Maßen

2.1 Einführung

„Risiko ist nicht gleich Volatilität". Dies ist eine oft geäußerte Kritik an der üblichen Vorgehensweise bei der Berechnung des Risikos von Kapitalanlagen mittels der Standardabweichung bzw. Varianz. Häufig wird Risiko von Kapitalanlegern als die Möglichkeit eines Verlustes beschrieben. Bei der Berechnung der Standardabweichung werden jedoch positive und negative Abweichungen vom Durchschnittsertrag gleich gewichtet. Eine Differenzierung zwischen Chance und Risiko einer Kapitalanlage wird somit nicht durchgeführt. Eine im Zeitverlauf größer werdende Standardabweichung bedeutet, daß die Stärke der Schwankungen der Kapitalerträge um den Mittelwert größer wird. Die Standardabweichung ist damit ein geeignetes Maß für die Volatilität der Erträge aus Kapitalanlagen.

Trotz der aus verhaltenswissenschaftlicher Sicht berechtigten Kritik an der Verwendung der Standardabweichung als Risikomaß gibt es Situationen, in denen die Standardabweichung ein passendes Risikomaß sein kann. Dies ist bei Vorliegen normalverteilter Kapitalerträge der Fall. Die Normalverteilung wird durch Mittelwert und Standardabweichung vollständig beschrieben. Bei der Analyse der Performance von Kapitalerträgen wird meistens angenommen, daß die Normalverteilung eine gute Annäherung an die tatsächliche Verteilung der Kapitalerträge darstellt. Es ist dann nur folgerichtig, wenn die Standardabweichung dazu verwendet wird, das Risiko von Kapitalanlagen zu messen. Da die Normalverteilung symmetrisch ist, sind Chance und Risiko in diesem Falle gleich groß.

Die Annahme der Normalverteilung macht es möglich, die Standardabweichung als Maß für das Risiko zu verwenden. Für andere Verteilungen der Kapitalerträge ist dies jedoch im allgemeinen nicht mehr möglich. Insbesondere bei Verteilungen, die nicht symmetrisch sind, kann die Verwendung der Standardabweichung zu einer erheblichen Fehleinschätzung des Risikos führen.

Die **Verwendung von Optionen** bei der Gestaltung von Portfolios führt regelmäßig zu Verteilungen, die von der Normalverteilung systematisch abweichen. Abbildung 1 zeigt die Verteilung der Erträge eines Aktienportfolios, das mit einer Put–Option gesichert wird. Der Ausübungskurs der Put–Option wird bei Auflegung des Portfolios at–the–money festgelegt, er entspricht zu Beginn also dem Preis der im Portfolio enthaltenen Aktien. Die Option wird über den gesamten Anlagehorizont hinweg gehalten. Die resultierende Verteilung weicht ganz erheblich von der ebenfalls abgebildeten Verteilung des nicht gesicherten Aktienportfolios ab, die näherungsweise einer Normalverteilung entspricht. Das Risiko des Portfolios mit der Put–Option kann nicht mehr mit der Standardabweichung gemessen werden: die Standardabweichung führt in diesem Falle zu einer signifikanten Überschätzung des Anlagerisikos.

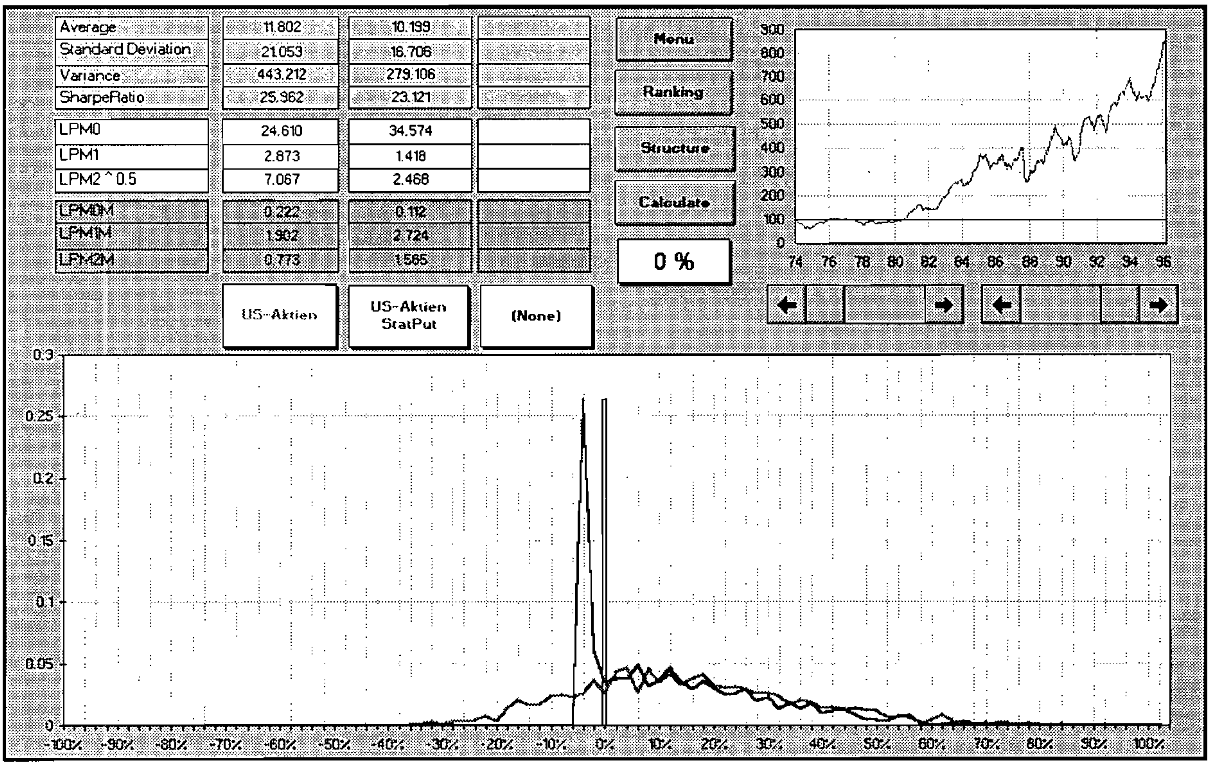

Abbildung 1: Verteilung der Renditen bei einer statischen Put–Strategie

Die im folgenden Abschnitt dargestellten Shortfall–Maße sind geeignete Risikomaße für **allgemeine Verteilungsfunktionen**. Sie sind insbesondere für Portfolios geeignet, die Optionen enhalten. Außerdem erlauben Shortfall–Maße eine wesentlich **flexiblere Berücksichtigung der Risikoeinstellung** eines Kapitalanlegers, als dies bei dem üblichen Ansatz zur Portfolio–Selektion, dem Markowitz–Ansatz, der Fall ist.

2.2 Theorie der Shortfall–Maße[4]

Shortfall–Maße stellen eine Verallgemeinerung des Markowitz–Ansatzes dar. Beim Markowitz–Ansatz werden Portfolios nach der Höhe ihres Mittelwertes und ihrer Standardabweichung beurteilt und in eine Rangfolge gebracht. Shortfall–Maße ersetzen die Standardabweichung als Risikomaß. Entsprechend werden Portfolios dann nach der Höhe ihres Mittelwertes relativ zu einem passenden Shortfallmaß, dem neuen Risikomaß, beurteilt.

Die Vorgehensweise bei der Berechnung von Shortfall–Maßen läßt sich aus Abbildung 2 ersehen:

[4] Vgl. z.B. Harlow / Rao (1989) oder Harlow (1991).

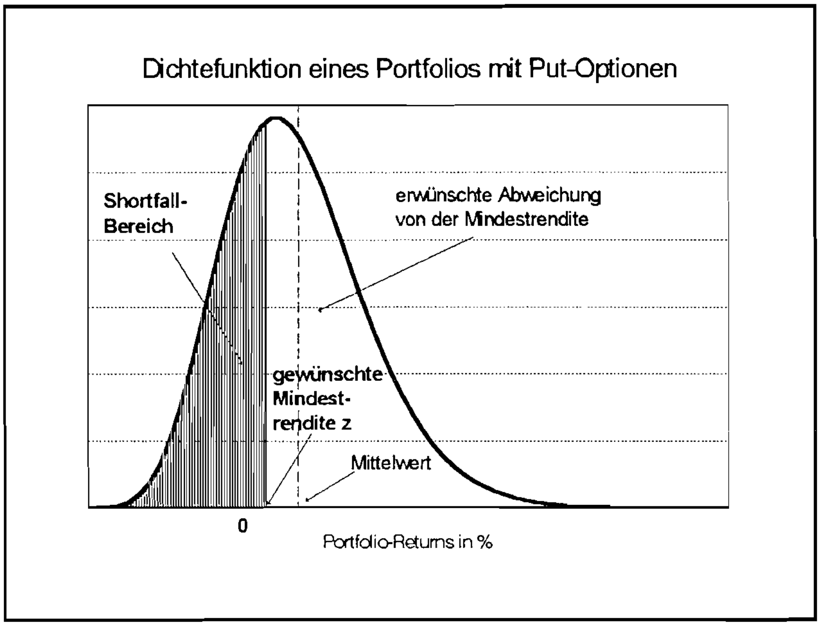

Abbildung 2: Das Shortfall–Risiko

Die Shortfall–Maße werden unter der gegebenen Verteilung links von der gewünschten Zielrendite z berechnet. Die Zielrendite wird vom Kapitalanleger beliebig festgelegt und ist Ausdruck seiner Risikoeinstellung. Die Zielrendite ist eine ganz wesentliche Größe, da alle weiteren Berechnungen von dieser Vorgabe abhängen. Die Fläche rechts von der Mindestrendite bezeichnet Abweichungen, die der Anleger als wünschenswert betrachtet. Dieser Bereich der Verteilung wird bei der Berechnung der Risikomaße somit auch nicht berücksichtigt. Shortfall–Maße entsprechen damit der eingangs genannten Definition, die Risiko als Möglichkeit von Verlusten festlegt. Die konkrete Bedeutung von „Verlust" wird durch die gewählte Mindestrendite festgelegt: jede Unterschreitung bedeutet einen unerwünschten Ausgang der Kapitalanlage.

Die allgemeine Definition von Shortfall–Maßen ist:[5]

$$LPM_n(z) = \int_{-\infty}^{z} (z - R)^n \, dF(R)$$

LPM_n bezeichnet die n verschiedenen möglichen Shortfall–Maße. LPM ist die Abkürzung für Lower Partial Moments. Für eine gegebene Mindestrendite z wird das Integral von minus unendlich bis z von der gewichteten Dichtefunktion $dF(R)$ berechnet. Die Gewichte $(z - R)$ sind die Abweichungen der Kapitalerträge (R) des Portfolios von der Mindestrendite. Diese Differenz ist im Intervall unterhalb von z immer positiv. Die einzelnen Shortfall–Maße unterscheiden sich dadurch, auf welche Weise diese Gewichte Eingang in die Berechnung finden. Im allgemeinen Fall wird $(z - R)$ in die n–te Potenz genommen. Üblicherweise werden in der Literatur allerdings nur die Fälle $n = 0$, 1 und 2 betrachtet. Dies sind auch diejenigen Shortfall–Maße, die im Programm MAMBA implementiert sind.

[5] Vgl. z.B. Bawa (1978).

Im Falle von $n = 0$ ergibt sich mit LPM_0 das Intergral unterhalb der Dichtefunktion. Das Ergebnis ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Ertrag des Portfolios die Mindestrendite unterschreitet.[6]

Für $n = 1$ ergibt sich der Wert für die durchschnittliche Unterschreitung der Mindestrendite. Ein Wert für LPM_1 von beispielsweise 3% bedeutet, daß der mittlere Ertrag links von der Mindestrendite um durchschnittlich 3% kleiner ist als die Mindestrendite selbst.

Bei $n = 2$ werden die Abweichungen $(z - R)$ quadriert. LPM_2 ist daher ein der Varianz ähnliches Maß, das aber nur für den Teil der Verteilung links von der Mindestrendite definiert ist. Bei LPM_2 werden verglichen mit LPM_1 die Unterschreitungen der Mindesrendite z stärker gewichtet.

Die Wahl eines Shortfall–Maßes kann sich an der Risikoaversion des Kapitalanlegers orientieren.[7] LPM_0 ist ein Maß zur Beurteilung der Verteilung, das sich für alle Investoren eignet. Wenn der Investor risikoavers ist, dann sollten Lower Partial Moments mit $n > 0$ gewählt werden. Je stärker die Risikoaversion ist, desto größer sollte der Wert von n gewählt werden. LPM_2 entspricht somit implizit einer größeren Risikoaversion als LPM_1.[8]

Die Maße Varianz und Semivarianz lassen sich als Spezialfälle von LPM_2 definieren. LPM_2 ist gleich der Hälfte der Varianz, wenn die betrachtete Verteilung symmetrisch ist und die Mindestrendite dem mittleren Ertrag des Portfolios entspricht. Die Semivarianz ergibt sich für eine beliebige Verteilung, wenn die Mindestrendite auf den mittleren Ertrag des Portfolios festgelegt wird. Shortfall-Maße stellen damit eine Verallgemeinerung häufig betrachteter symmetrischer und asymmetrischer Risikomaße dar.

2.3 Anwendungen von Shortfall-Maßen

Für die Anwendung von Shortfall–Maßen ist es notwendig, sowohl die Art des Shortfall–Maßes (n) als auch die Mindestrendite (z) im voraus festzulegen. Durch die Wahl von n und z kann die individuelle Risikoeinstellung des Kapitalanlegers flexibel und umfassend berücksichtigt werden. Ein stark risikoaverser Investor beispielsweise wird LPM_2 als Risikomaß wählen und einen relativ hohen Wert als Mindestrendite festlegen. Es ist allerdings sinnvoll, die Mindestrendite nicht beliebig zu wählen, sondern an der Höhe einer passenden

[6] LPM_0 ist ein dem Value at Risk (VaR) sehr ähnliches Maß. VaR hat sich inzwischen zu einem Standard-Verfahren für die Risikomessung im Eigenhandel von Banken entwickelt und wird auch von internationalen Gremien wie z. B. dem Basler Ausschuß für Bankenaufsicht als Konzept für die Risikoregulierung von Banken propagiert. Es läßt sich zeigen, daß LPM_0 und VaR direkt ineinander überführt werden können: bei LPM_0 wird unter Vorgabe einer Mindestrendite die Verlustwahrscheinlichkeit berechnet, bei VaR wird unter Vorgabe einer maximalen Verlustwahrscheinlichkeit (üblicherweise 1% oder 5%) die Höhe des vermutlichen „Mindest"-Verlustes ermittelt.

[7] Vgl. z.B. Bawa (1975), Bawa (1978) oder Harlow / Rao (1989).

[8] Formal wird die Risikoaversion durch die Nutzenfunktion ausgedrückt. Für die sinnvolle Anwendung von LPM_0 ist lediglich erforderlich, daß die erste Ableitung der Nutzenfunktion positiv ist. LPM_0 ist damit für **alle** Anleger anwendbar. Risikoaversion liegt dann vor, wenn die zweite Ableitung der Nutzenfunktion negativ ist, es gilt dann also $U' > 0$ und $U'' < 0$. In diesem Fall ist LPM_1 das geeignete Risikomaß. LPM_2 sollte dann eingesetzt werden, wenn zusätzlich die dritte Ableitung der Nutzenfunktion positiv ist: $U''' > 0$. Vgl. Bawa (1978).

Alternativverzinsung (Benchmark) auszurichten. Ein Lebensversicherer wird für z möglicherweise den vermuteten durchschnittlichen Kapitalertrag der Konkurrenz wählen. Für einen Privatanleger könnte ein Wert von z in Höhe der Geldmarktverzinsung passend sein. Auch die Festlegung $z = 0$ ist sicherlich in vielen Fällen eine geeignete Ausgangsposition für die Berechnung des Risikos.

Interessante Anwendungsmöglichkeiten für Shortfall–Maße ergeben sich zunächst im Bereich der Risikomessung. Entsprechend der gewählten Einstellung der Parameter z und n läßt sich das Risiko verschiedener Portfolios berechnen und miteinander vergleichen. Eine Auswahl zwischen mehreren Portfolios erfordert allerdings zusätzlich die Berücksichtigung des durchschnittlichen Portfolioertrages. Dabei können Shortfall–Maße zur Berechnung der risikoadjustierten Performance verschiedener Portfolios verwendet werden.

Im Falle des Markowitz–Ansatzes ist die Sharpe–Ratio das passende Performance–Maß:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{SR} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Bei der Sharpe–Ratio wird der durchschnittliche Ertrag eines Portfolios μ abzüglich dem risikolosen Zins r durch die Standardabweichung σ dividiert. Bei Portfolios, deren Ertragsverteilung von der Normalverteilung abweicht, ist die Sharpe–Ratio kein geeignetes Maß mehr für die Beurteilung der Performance.

Shortfall–Maße können nun anstelle der Standardabweichung zur Risikoadjustierung benutzt werden. Als Resultat ergeben sich dadurch modifizierte Sharpe–Ratios, die, genauso wie die Shortfall-Maße selbst, für die Beurteilung beliebiger Renditeverteilungen eingesetzt werden können:[9]

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{SR}_0 = \frac{\mu - r}{\mathrm{LPM}_0(z)}$$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{SR}_1 = \frac{\mu - r}{\mathrm{LPM}_1(z)}$$

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{SR}_2 = \frac{\mu - r}{\sqrt{\mathrm{LPM}_2(z)}}$$

Im Falle von SR_1 wird LPM_1 als Risikomaß genommen, bei SR_2 ist es die Wurzel aus LPM_2. SR_1 und SR_2 sind passende Performancemaße für risikoaverse Investoren. Im Programm ist außerdem noch SR_0 implementiert, bei dem LPM_0 zur Risikoadjustierung der Portfolioerträge verwendet wird. Der im μ/σ-Ansatz risikolose Zins r weist im $\mu/\mathrm{LPM}_n(z)$-Ansatz üblicherweise ein Risiko auf, das je nach der gewählten Mindestrendite z und dem verwendeten LPM-Maß unterschiedlich hoch ausfallen kann. Der Zinssatz r ist im $\mu/\mathrm{LPM}_n(z)$-Ansatz als eine Benchmark zu interpretieren, bei deren Überschreitung der Investor der Kapitalanlage einen positiven Ertrag zuweist. Die Verwendung eines Tagesgeldsatzes für r bedeutet beispielsweise, daß der Investor einen Anlageerfolg (= einen positiven Wert für das

---

[9] Vgl. Zimmermann (1994) und Albrecht / Maurer / Stephan (1995).

Performancemaß) erst dann anerkennt, wenn der durchschnittliche Ertrag aus der Kapitalanlage in der Anlageperiode größer ist als der durchschnittliche Tagesgeldzins.

Ein weiteres verwandtes Performance-Maß ist die Sortino-Ratio (SoR).[10] Sie entspricht der modifizierten Sharpe Ratio SR_2 mit dem einen Unterschied, daß anstelle von *r* die Mindestrendite *z* eingesetzt wird: $\mathrm{SoR} = \frac{\mu - z}{\sqrt{\mathrm{LPM}_2(z)}}$

Die große Vielfalt an Maßen zur Beurteilung der Performance einer Kapitalanlage erfordert beim Investor eine sorgfältige Auswahl der für ihn sinnvollen Maße. Alle drei wählbaren Parameter für die Performancemessung (*n*, *z* und *r*) beeinflussen die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit der Kapitalanlagen. Die Parameter sollten daher möglichst gut auf die konkrete Situation des Investors abgestimmt sein: Die Auswahl des passenden Shortfall-Maßes LPM_n orientiert sich an der Risikoaversion des Investors, und für die Festlegung der beiden Parameter *z* und *r* eignet sich besonders die Verwendung alternativer Benchmark-Renditen.

[10] Vgl. Sortino / Price (1994).

3 Risikomessung mit dem Programm MAMBA

3.1 Grundlagen

MAMBA – *Metzler Asset Management Benchmark Analyser* ist ein unter Microsoft–Excel entwickeltes Programmpaket. Das Paket umfaßt ein dialoggesteuertes Analyseprogramm und eine historische Datenbasis.

Mit Hilfe des Programmes lassen sich für beliebige Währungen, Investmentuniversen, Anlagehorizonte, historische Analysezeiträume und Mindestrenditeerwartungen Portfolios zusammenstellen und auf ihre Risiko- und Ertrágscharakteristika hin analysieren.

3.2 Zusammenstellung von Portfolios

3.2.1 Allgemeine Eigenschaften

Das Programm MAMBA erlaubt es, diverse internationale Aktien- und Rentenportfolios zusammenzustellen. Es können alle im Investmentbereich gängigen Aktienmarkt–, Rentenmarkt- und Geldmarktindizes verwendet werden. Implementiert sind die MSCI-Indizes für die Aktienmärkte sowie die JP-Morgan-Indizes für die Rentenmärkte. Außerdem enthält die Datenbank eine große Anzahl landesspezifischer Aktien- und Rentenindizes. Neben diesen in der historischen Datenbank zur Verfügung stehenden Indizes kann der Benutzer beliebige weitere Datenreihen in eine Analyse mit einbeziehen, wie zum Beispiel bestimmte Fondsreihen oder Edelmetallpreise.

Die Portfolios lassen sich für verschiedene Referenzwährungen und für verschiedene Anlagehorizonte von einem bis maximal zehn Jahren analysieren. Für die Berechnung der Portfoliorenditen kann zwischen folgenden verschiedenen Modi gewählt werden:

- Berechnung der nominalen Renditen,
- Berechnung der realen Renditen und
- Berechnung der Renditen relativ zu einer Benchmark (aktive Renditen).

Der historische Analysezeitraum kann gezielt ausgewählt werden. Eine Einschränkung der minimalen oder maximalen Renditen ermöglicht das Auslassen von Ausreißern. Verschiedene Zeiträume wie beispielsweise Crash–Phasen lassen sich aus weiteren Berechnungen ausschließen.

3.2.2 Währungssicherung

Die aus Sicht der Referenzwährung in ausländischen Indizes gehaltenen Positionen eines Portfolios können gegen Währungsschwankungen gehedgt werden. Der Anteil des Positionswertes, für den diese Sicherung erfolgen soll, ist zwischen 0% und 100% wählbar.

Konkret wird beim Währungshedge ein dem gewählten Prozentsatz entsprechender Anteil aller in ausländischen Indizes (aus Sicht der Referenzwährung) gehaltenen Positionen über Futures gesichert. Die Futures haben eine Laufzeit von einem Monat und werden über das Cost–of–Carry–Modell[11] bewertet. Der Wert eines Futures, der im Monat $t+1$ zum Kauf von I_t Einheiten der Fremdwährung zum in t gültigen Wechselkurs w_t (Referenzwährung/Fremdwährung) verpflichtet, beträgt nach dem Cost–of–Carry–Modell:

$$F = I_t w_t e^{(r-r_f)\frac{1}{12}} \tag{5}$$

$(r-r_f)$ bezeichnet die im Zeitpunkt t gültige Differenz zwischen den Einmonatszinsen im Referenzland und im jeweiligen Fremdwährungsland. Der Faktor $^1/_{12}$ erklärt sich durch die Restlaufzeit des Futures von einem Monat. Futures werden für alle im Portfolio vorhandenen Fremdwährungen bewertet. Es ist zu beachten, daß zur Währungssicherung Short–Positionen im Future zu halten sind, da die Fremdwährung verkauft wird. Die Rendite jeder gesicherten Position ergibt sich nach Formel (6) aus den relativen Wertänderungen von Index plus (short) Future. Dabei wird unterstellt, daß der Wert der Indexposition in Fremdwährung genau dem Indexstand entspricht.[12]

$$\ln\left(\frac{w_{t+1}I_{t+1} + (w_t - w_{t+1})I_t}{I_t w_t - I_t w_t (e^{-r_f\frac{1}{12}} - e^{r\frac{1}{12}})}\right) \tag{6}$$

Im Nenner der Formel (6) steht der Wert (in Referenzwährung) eines Portfolios aus Index und (short) Future zum Zeitpunkt t. Der Zähler gibt den Wert der Position im Zeitpunkt $t+1$ an. Dabei wird deutlich, daß man durch die Short–Position im Future genau dann einen positiven Ertrag erhält, wenn die Fremdwährung abgewertet hat, d.h. wenn $w_{t+1} < w_t$.

3.2.3 Optionsstrategien

Das Programm ermöglicht die Wahl zwischen verschiedenen Optionsstrategien. Die Anzahl der verwendeten Optionspositionen im Verhältnis zu den Stückzahlen des Basisinstrumentes läßt sich für jede Strategie zwischen 0% und 100% festlegen.

Bei den Optionsstrategien werden Long– oder Short–Positionen von Optionen in das vorher zusammengestellte Portfolio aufgenommen. Das Basisinstrument der Optionen ist das Gesamtportfolio ohne Optionssicherung. Die Optionswerte werden nach dem Modell von Black und Scholes (1973) bestimmt. Danach ergeben sich die folgenden Preise für europäische Call– bzw. Put–Optionen:

$$c = I \cdot N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad \text{(Call–Option)} \tag{7}$$

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - I \cdot N(-d_1) \quad , \qquad \text{(Put–Option)} \tag{8}$$

[11] Siehe Hull (1993), S.63 ff.

[12] Diese Annahme wird nur zur rechentechnischen Vereinfachung getroffen. Da hier nur die Renditen verwendet werden, können beliebige Beträge in den Index investiert sein.

mit

$$d_1 = \frac{\ln(I/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Mit *N(x)* ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung bezeichnet, *I* bezeichnet den Wert des Portfolios, *X* den Basispreis, *T–t* die Restlaufzeit der Option, *r* den risikolosen Zinssatz und σ die Volatilität der Portfoliorenditen.

Da letztlich nur die Renditen der einzelnen Optionsstrategien bestimmt werden müssen, ist der konkrete Wert *I* der Indexposition nicht relevant.

3.2.3.1 Dynamische Put–Strategie

Bei dieser Strategie werden jeden Monat Put–Optionen auf das Gesamtportfolio gekauft. Die Puts haben eine Laufzeit von einem Monat und werden bis zum Verfall gehalten. Der Basispreis kann, in Relation zum Preis des Underlyings, frei gewählt werden.

Die zur Optionsbewertung nötige annualisierte Renditevolatilität wird aus den monatlichen Renditen des Basisinstrumentes (Gesamtportfolio ohne Option) geschätzt, wobei nur die historischen Renditen der nicht ausgeschlossenen Zeiträume zur Schätzung verwendet werden. Als risikolose Zinssätze werden die zugehörigen Einmonatszinsen im Referenzland verwendet. Die monatliche Rendite einer zu α% gesicherten dynamischen Put–Strategie berechnet sich aus:

$$(9) \qquad \ln\left(\frac{I_{t+1} + \alpha \cdot \max(0, X - I_{t+1})}{I_t + \alpha \cdot p}\right),$$

wobei I_t hier den Wert (in Referenzwährung) des Portfolios ohne Optionen zum Zeitpunkt *t* bezeichnet. In Gleichung (9) steht im Nenner der Wert der Gesamtposition plus Option im Zeitpunkt *t*, im Zähler der Wert der Gesamtposition plus Option in *t*+1. Da der Zeitpunkt *t*+1 gerade der Verfallszeitpunkt der Option ist, ergibt sich der Optionswert als $\max(0,\ X - I_{t+1})$. Um die zum gewählten Anlagehorizont passenden Renditen zu bestimmen, wird in einem letzten Schritt eine entsprechende Anzahl monatlicher Renditen addiert, d.h. eine zweijährige Rendite ist die Summe von 24 aufeinanderfolgenden monatlichen Renditen.

3.2.3.2 Dynamische Call–Strategie

Bei dieser Strategie werden jeden Monat Call–Optionen auf das Gesamtportfolio verkauft. Die Calls haben eine Laufzeit von einem Monat und werden bis zum Verfall gehalten. Der Basispreis ist wieder frei zu wählen.

Die dynamische Call–Strategie unterscheidet sich insofern von der dynamischen Put–Strategie, als hier Short–Positionen von Call–Optionen zu den vorher gewählten Portfolios hinzugefügt werden. Risikoloser Zins und Volatilität bestimmen sich wie bei der dynamischen Put–Strategie. Die monatliche Rendite eines Portefeuilles mit dynamischer Call–Strategie ergibt sich aus:

$$(10) \qquad \ln\left(\frac{I_{t+1} - \alpha \cdot \max(0, I_{t+1} - X)}{I_t - \alpha \cdot c}\right)$$

Im Nenner von Gleichung (10) steht wieder der Wert der Position (plus Optionen) zum Zeitpunkt t, im Zähler der Wert zum Zeitpunkt $t+1$. Da Call–Optionen geschrieben werden, ist der Optionswert vom Wert des Portefeuilles abzuziehen.

3.2.3.3 Dynamische Collar-Stratgie

Es werden jeden Monat sowohl Put–Optionen auf das Gesamtportfolio gekauft, als auch Call–Optionen auf das Gesamtportfolio verkauft. Sowohl Puts als auch Calls haben eine Laufzeit von einem Monat. Die Basispreise für beide Optionen können in Relation zum Preis des Underlyings frei gewählt werden.

Die dynamische Collar–Strategie ist eine Kombination der Put– und Call–Strategie. Die monatliche Rendite eines Portefeuilles mit dynamischer Collar–Strategie errechnet sich wie folgt:

$$(11) \qquad \ln\left(\frac{I_{t+1} + \alpha \cdot \max(0, X_{PUT} - I_{t+1}) - \alpha \cdot \max(0, I_{t+1} - X_{CALL})}{I_t + \alpha \cdot p - \alpha \cdot c}\right)$$

3.2.3.4 Statische Put-Strategie

Die statische Strategie unterscheidet sich dadurch von den dynamischen Strategien, daß hier mit einer (long) Put-Option gesichert wird, deren Restlaufzeit dem gewählten Anlagehorizont entspricht. Wie bei den dynamischen Strategien können sowohl der Basispreis als auch die Anzahl der Optionen (als Prozentsatz der Anzahl der Basisinstrumente) gewählt werden. Die zur Optionsbewertung nötige Volatiliät bestimmt sich wie bei den dynamischen Strategien, der risikolose Zins ergibt sich aus den durchschnittlichen (annualisierten) Monatszinsen im Referenzland über die Laufzeit der Option. Die Renditen der statischen Put–Strategie berechnen sich analog zur Gleichung (9) als

$$(12) \qquad \ln\left(\frac{I_{t+1} + \alpha \cdot \max(0, X - I_{t+1})}{I_t + \alpha \cdot p}\right),$$

wobei hier jedoch der zeitliche Abstand zwischen t und $t+1$ nicht einem Monat, sondern dem gewählten Anlagehorizont entspricht.

3.2.3.5 Wertsicherungsstrategie

Bei den bisherigen Put–Strategien wird (dynamisch oder statisch) die Position in den verschiedenen gewählten Indizes insoweit gesichert, daß ihr Wert am Ende der Periode (1 Monat oder Anlagehorizont) mindestens den Basispreis der Option erreicht. Für die Rendite der Gesamtposition (plus Optionen) ist jedoch auch zu berücksichtigen, daß zusätzliches Kapital für den Kauf der Option investiert werden muß. Die Wertsicherungsstrategie sichert eine vorher gewählte durchschnittliche jährliche Zielrendite auf das gesamte eingesetzte Kapital (Wert der Indizes plus Optionsprämie). Um eine solche Wertsicherung zu erreichen, wird eine Put–Option mit einer dem Anlagehorizont entsprechenden Laufzeit in das Portfolio hinzugefügt. Der Basispreis der Option ist so zu bestimmen, daß für das Portefeuille plus Optionen die gewählte Zielrendite erreicht wird. Leider existiert keine analytische Lösung, so daß der Basispreis mit numerischen Verfahren zu bestimmen ist. Im Programm wurde ein Newton–Verfahren implementiert, daß die entsprechenden X–Werte bestimmt. Es ist anzumerken, daß nur dann eine Lösung für den Basispreis existiert, wenn die zu sichernde Rendite unterhalb des risikolosen Zinssatzes r liegt.

Bis auf die Bestimmung des Basispreises ist die Wertsicherungsstrategie identisch mit der statischen Put–Strategie. Dementsprechend ergeben sich die Renditen aus Gleichung (12).

3.3 Analyse der Portfolios

3.3.1 Verteilung und Maße

Abbildung 3 beispielsweise (s. S. 13) zeigt die Darstellung, auf der die Renditeverteilungen und einige Ertrags– und Risikomaße der Portfolios berechnet und verglichen werden können.

In einem Ranking können die Portfolios in Abhängigkeit verschiedener Risikomaße sortiert werden. Weitere Grafiken erleichtern den Vergleich und das gezielte Auswählen von Portfolios, die bestimmte Kriterien erfüllen sollen.

3.3.2 Risiko–Ertrags–Diagramme

Mit Hilfe von Risiko–Ertrags–Diagrammen kann eine große Zahl an Portfolios verglichen werden. Dabei werden Diagramme auf der Basis der klassischen Risikomaße und der modernen Shortfall–Maße erstellt. Auf der Ordinate kann beispielsweise der mittlere Ertrag der Portfolios abgetragen werden und auf der Abszisse die Werte des ausgewählten Risikomaßes.

4 Beispielanalysen

Im folgenden werden die Resultate von sechs ausgewählten Beispielportfolios detailliert dargestellt und interpretiert. Als Basis wird für jedes Portfolio eine Anlage in US–Aktien durchgeführt (100% MSCI USA). Referenzwährung ist in allen Fällen die D–Mark. Der Anlagezeitraum ist Januar 1974 bis April 1996 und der Anlagehorizont beträgt ein Jahr. Als Vergleichsmaßstab dient in den folgenden Abbildungen jeweils das Portfolio ohne Sicherungsmaßnahmen, berechnet auf der Basis nominaler Renditen. Zur Berechnung der Shortfall–Maße und der darauf aufbauenden modifizierten Sharpe–Ratios wird eine Mindestrendite von 0% eingestellt.[13]

[13] Die Werte der berechneten Shortfall–Maße sind entscheidend von der gewählten Mindestrendite abhängig. Eine andere gewählte Mindestrendite führt jedoch nicht nur zu neuen Ergebnissen für die Shortfall–Maße, es kann sich dadurch auch die Rangfolge bei Risiko– oder Performancevergleichen erheblich verändern. Die Wahl der Mindestrendite ist daher mit großer Sorgfalt durchzuführen.

4.1 Nominale versus reale Renditen

In Abbildung 3 werden zwei Verteilungen abgebildet. Die erste Verteilung bezieht sich auf das Portfolio mit 100% US–Aktien, allerdings gerechnet auf Basis realer Renditen. „Real“ bedeutet, daß von den nominalen Renditen der zum jeweiligen Monat gehörende Geldmarktsatz für die Referenzwährung (D–Mark) abgezogen wird. Zum Vergleich ist auch die Verteilung für die nominalen Renditen mit abgebildet.

Die Verteilung der realen Renditen weist – wie nicht anders zu erwarten – einen deutlich geringeren Mittelwert auf. Er beträgt nur noch 5,1%, während die nominalen Renditen im Durchschnitt 11,8% betragen. Die Varianz bzw. die Standardabweichung sind bei beiden Verteilungen jedoch sehr ähnlich, da der Geldmarktsatz nur eine geringe Volatilität aufweist. Die Sharpe–Ratios sind für beide Verteilungen identisch.[14]

Die Shortfall–Maße können sich jedoch aufgrund der unterschiedlichen Mittelwerte der beiden Verteilungen ganz erheblich unterscheiden. Im gewählten Beispiel erhöhen sich alle Shortfall–Maße und entsprechend vermindern sich alle modifizierten Sharpe–Ratios durch die Einstellung "reale Renditen".

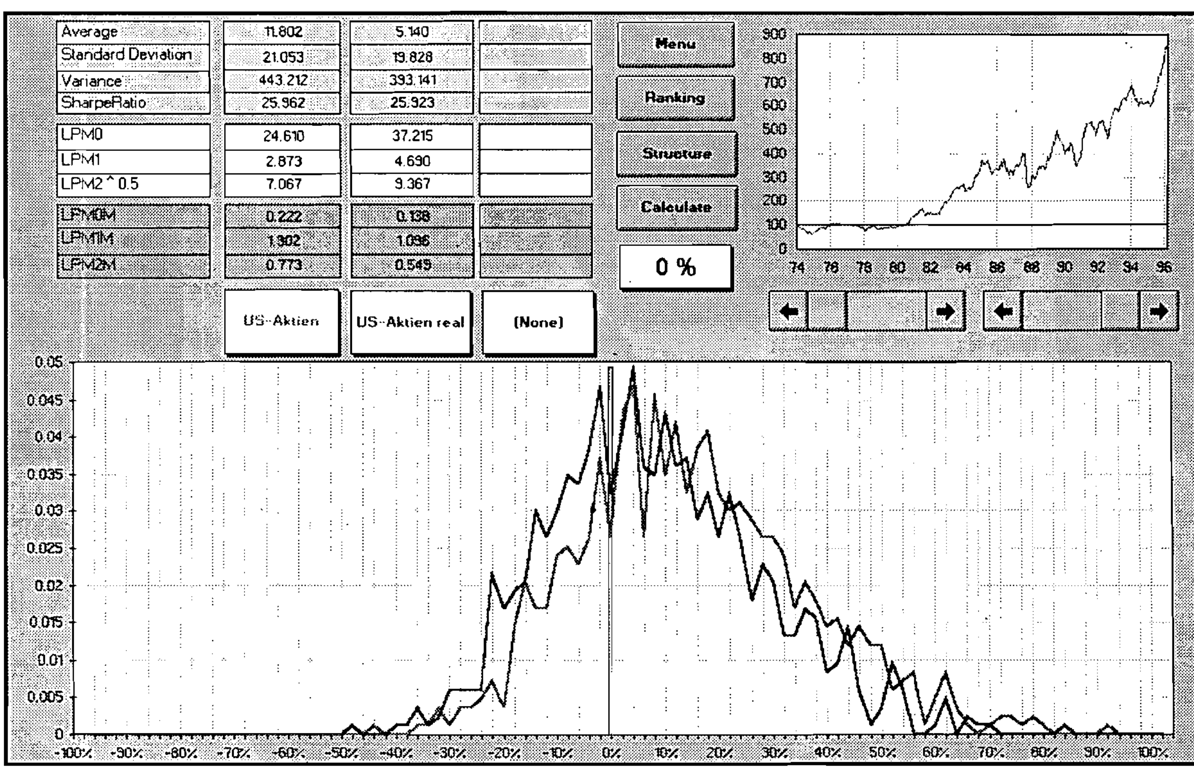

Abbildung 3: Nominale versus reale Renditen

---

[14] Das Sharpe–Ratio hat im Zähler den Ausdruck: 100*(durchschnittlicher nominaler Portfolio–Return – risikoloser Zins). Beim realen Return wird zur Berechnung der Sharpe–Ratio der Geldmarktsatz nicht abgezogen, da diese Korrektur schon durch die Berechnung der realen Returns vorgenommen wird. Die Sharpe–Ratios von nominalen und realen Portfolios, die ansonsten eine gleich Struktur aufweisen, sind daher identisch.

4.2 Nominale Renditen: 1 Jahr versus 5 Jahre Anlagehorizont.

Abbildung 4 zeigt die Auswirkung eines längeren Anlagehorizonts. Das Basisportfolio wird hier für die beiden Anlagehorizonte 1 Jahr und 5 Jahre analysiert.

Der mittlere annualisierte Ertrag ist in beiden Fällen identisch und beträgt 11,8%. Der längere Anlagehorizont führt jedoch zu einer deutlich geringeren Standardabweichung der Renditen. Sie beträgt nur noch 8,6 verglichen mit 21 bei einjährigem Anlagehorizont. Der längere Anlagehorizont führt zwar nicht zu einem höheren jährlichen Ertrag, aber die Schwankungsbreite der Renditen um den Mittelwert wird geringer, d. h., es besteht eine größere Wahrscheinlichkeit, in die Nähe des Durchschnittsertrags zu kommen. Entsprechend steigt die Sharpe–Ratio von 26 auf 63,2 an.

Das Risiko, gemessen mit den Shortfall–Maßen, wird durch den längeren Anlagehorizont ebenfalls deutlich kleiner. Die Wahrscheinlichkeit, mit der gewählten Portfolio–Struktur nach 5 Jahren einen absoluten Verluste zu erleiden (= LPM_0), beträgt nur 7,2%, verglichen mit 24,6% bei einjährigem Anlagehorizont. Die anderen Shortfall–Maße vermindern sich entsprechend. Bei einem Anlagehorizont von einem Jahr beträgt LPM_1 2,9%. Dies bedeutet, daß die durchschnittliche Unterschreitung der Mindestrendite 2,9% beträgt. Bei fünf Jahren Anlagehorizont wird die 0% – Marke im Durchschnitt nur um einen Wert von 0,3% unterschritten.

Da der Mittelwert in beiden Fällen gleich ist, führt die Risikoreduktion durch den längeren Anlagehorizont bei den modifizierten Sharpe–Ratios zu einer erheblichen Steigerung.

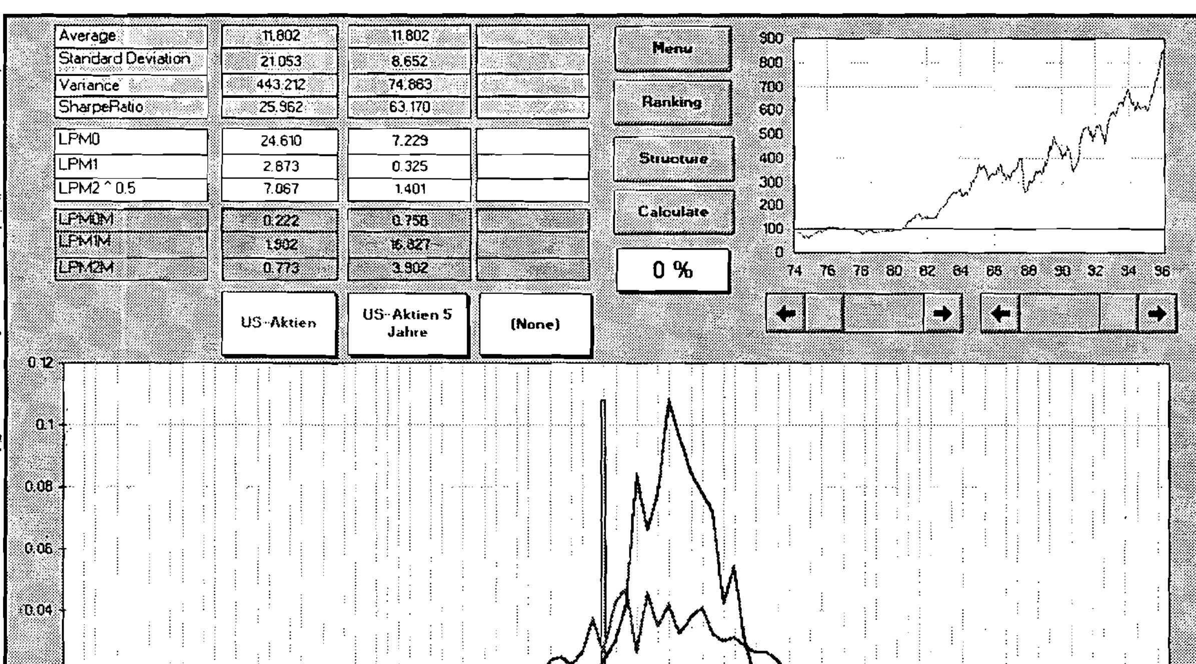

Abbildung 4: Nominale Renditen: 1 Jahr versus 5 Jahre Anlagehorizont

4.3 Auswirkungen einer statischen Put–Sicherung

Die Absicherung der Renditen durch Kauf einer Put–Option auf US–Aktien zu Beginn des Jahres führt dazu, daß die linke Seite der ursprünglichen Verteilung ab einem bestimmten Punkt „abgeschnitten" wird. Der mittlere Ertrag nach Durchführung der statischen Put–Sicherung ist mit 10,2% um 1,6% kleiner bei dem nicht gesicherten Portfolio. Die Differenz von 1,6% stellt die durchschnittliche Prämie für die Put–Option dar.

Die Standardabweichung nimmt ebenfalls spürbar ab. Die Grafik zeigt jedoch auch, daß die Standardabweichung als symmetrisches Maß hier nur von geringem Nutzen ist, da die Verteilung extrem asymmetrisch verläuft. Die Sharpe–Ratio ist in diesem Falle kein sinnvolles Maß für die risikoadjustierte Performance. Zur Performancebewertung müssen daher Shortfall–Maße und modifizierte Sharpe–Ratios herangezogen werden.

Die Shortfall–Maße zeigen unterschiedliche Ergebnisse an. LPM_0 ist im Falle der Put–Sicherung größer als bei dem Portfolio ohne Sicherung. Die Wahrscheinlichkeit, die 0%–Marke zu unterschreiten, beträgt jetzt 34,6% und ist damit um ca. 10% angestiegen. Der Grund dafür liegt hauptsächlich in der Linksverschiebung der Verteilung durch die zu zahlende Optionsprämie. Die anderen Shortfall–Maße haben sich dagegen verbessert. Der Erwartungswert für eine Unterschreitung der Mindestrendite (= LPM_1) ist von 2,9% auf 1,4% gesunken. LPM_2 hat sich von 7,1 auf 2,5 vermindert. Die Wahrscheinlichkeit für einen absoluten Verlust ist zwar angestiegen, die Höhe des möglichen Verlustes ist dagegen wesentlich kleiner als ohne Sicherungsmaßnahme.

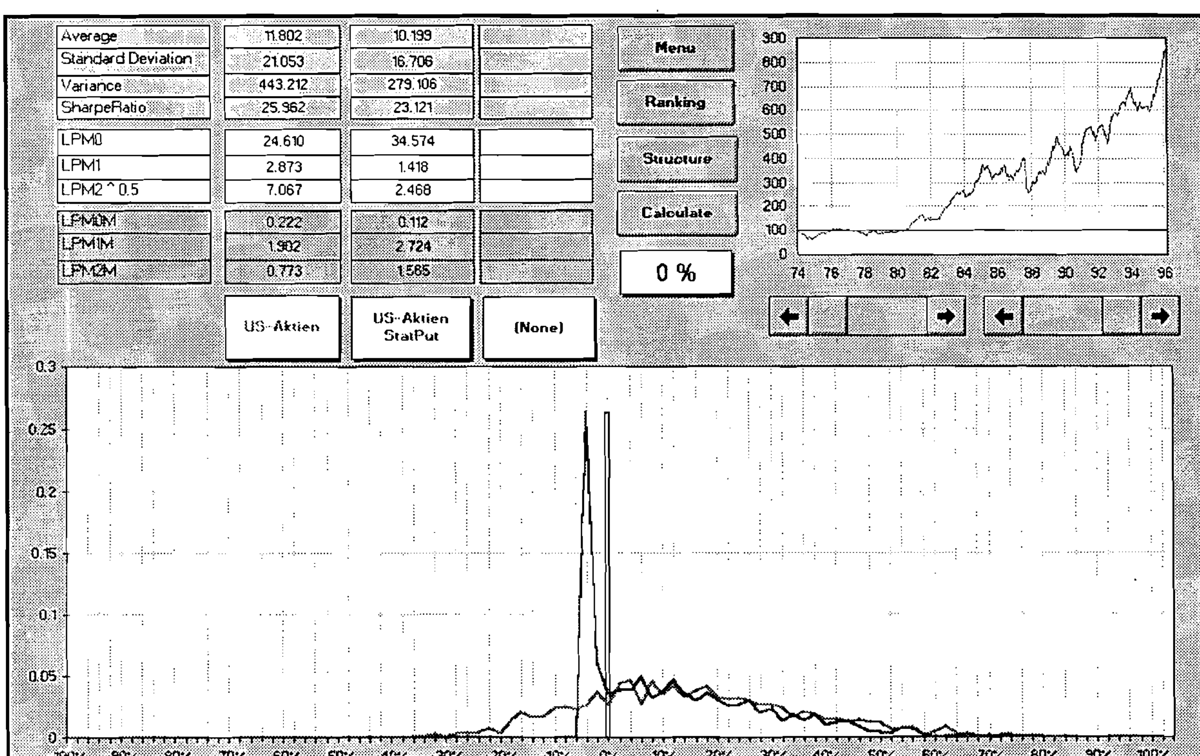

Abbildung 5: Auswirkungen einer statischen Put-Sicherung

4.4 Auswirkungen einer dynamischen Put–Strategie

Bei der dynamischen Put–Strategie wird zu Beginn jedes Monats eine Put–Option mit einer Restlaufzeit von genau einem Monat gekauft. Die Option läuft also zum Ende des Monats aus. Diese Strategie erweist sich als deutlich teurer als die statische Put–Strategie: der Mittelwert beträgt jetzt nur noch 8%, während bei der statischen Strategie durchschnittlich 10,2% erwirtschaftet wurden.

Die dynamische Sicherung mit Put–Optionen bietet allerdings auch einen höheren Schutz gegen Verlust, da das Portfolio jeden Monat gegen Verlust unterhalb des gewählten Ausübungskurses abgesichert wird. Bei der statischen Strategie entspricht die Laufzeit der Put–Option immer dem Anlagehorizont des Portfolios. Gegen Verluste aus einer vorzeitigen Auslösung des Portfolios besteht in diesem Falle keine Versicherung. Die statische Put–Sicherung kostet deshalb auch weniger als die dynamische Sicherungsstrategie.

Bei dem hier gewählten Beispiel mit Mindestrendite 0% weist die dynamische Put–Sicherung deutlich geringere Shortfall–Maße auf als das Portfolio ohne Sicherung. Die modifizierten Sharpe–Ratios sind allerdings im Falle keiner Sicherungsmaßnahmen trotzdem höher. Dieses Ergebnis hängt jedoch – wie alle anderen Ergebnisse auch – ganz erheblich von der gewählten Mindestrendite ab. Bei einem höheren Wert für die Mindestrendite kann sich auch die dynamische Sicherung als überlegen herausstellen.

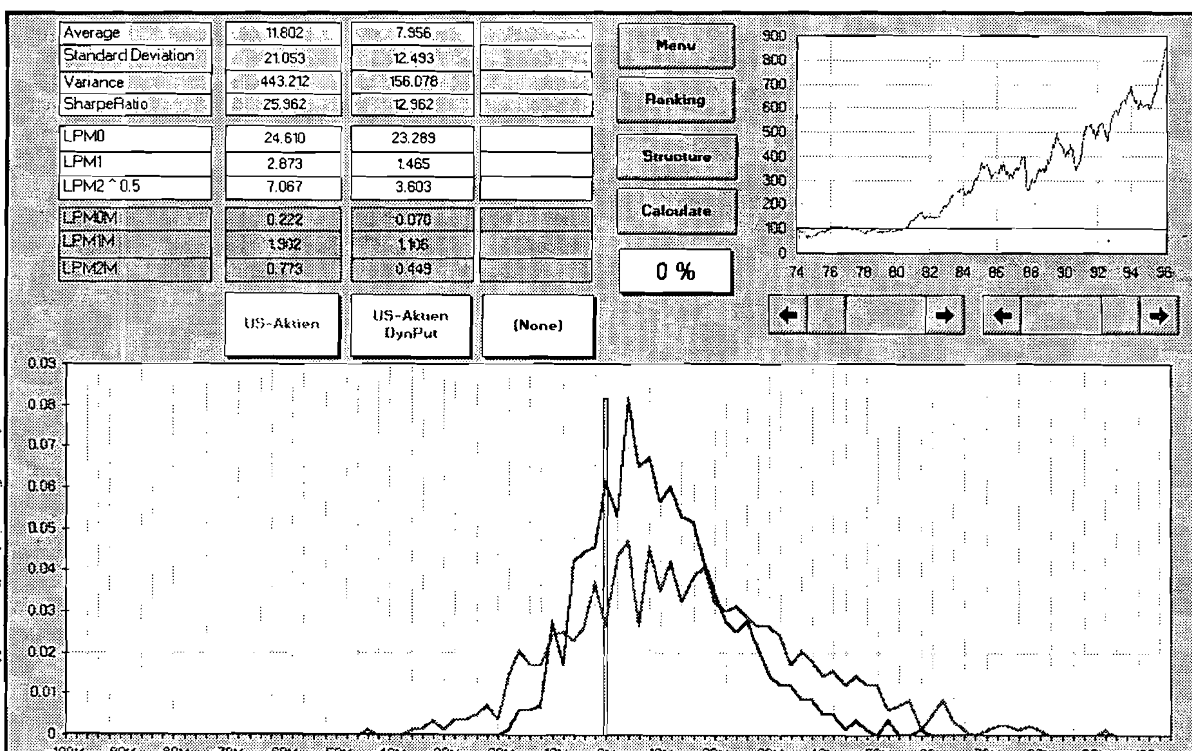

Abbildung 6: Auswirkungen einer dynamischen Put-Strategie

4.5 Auswirkungen der Diversifikation: DAX vs. MSCI-Welt-Index

Der Vergleich zwischen einer Anlage im DAX und einem Portfolio, das entsprechend dem Welt-MSCI-Index strukturiert ist, zeigt die Vorteile internationaler Diversifikation auf. Der Vergleich beruht auf einem Anlagehorizont von fünf Jahren. Als Basis für die Berechnungen dienen der Zeitraum von Januar 1974 bis Oktober 1996. Für die Konstruktion des Welt-MSCI Portfolios wurde für jedes Land ein Performance-Index gewählt. Dadurch ist ein direkter Vergleich mit dem DAX möglich, der auch ein Performance-Index ist.[15]

Der Vergleich zeigt eine eindeutige Dominanz des Welt-MSCI Portfolios. Während der DAX eine durchschnittliche Jahresrendite von 9,8% aufweist, beträgt bei einer weltweiten Aktienanlage die Rendite etwa 12,1%. Die höhere Rendite des Welt-MSCI Portfolios wird darüber hinaus mit einem geringeren Risiko erreicht: die Standardabweichung beträgt nur 7,3 verglichen mit 8,3 beim DAX-Portfolio. Auch die Shortfall-Risikomaße sind beim Welt-Portfolio deutlich geringer als bei einer Anlage im DAX. So beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen Verlust zu erleiden, lediglich 3%, beim DAX dagegen muß in 9,6% aller 5-Jahreszeiträume mit einer negativen Rendite gerechnet werden.

Das Beispiel zeigt damit nachdrücklich, daß bei Aktien eine weltweit diversifizierte Anlagestruktur einer ausschließlichen Anlage im DAX eindeutig vorzuziehen ist.

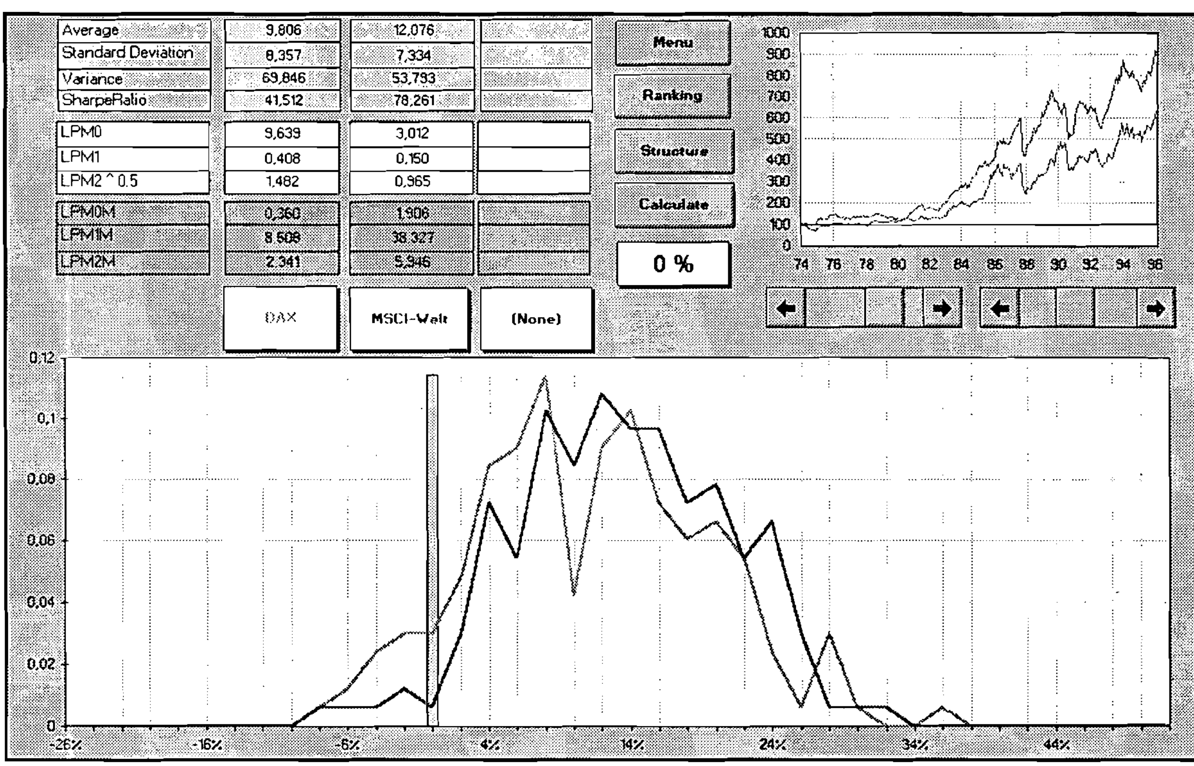

Abbildung 7: Auswirkungen der Diversifikation: DAX vs. MSCI-Welt-Index

---

[15] Bei einem Performance-Index wird eine Dividendenausschüttung reinvestiert.

5 Schlußbemerkungen

Der Shortfall-Ansatz ist ein sehr flexibles und leistungsfähiges Verfahren zur Risiko- und Performancebewertung von Kapitalanlagen. Im Gegensatz zum Markowitz-Ansatz sind Shortfall-Maße nicht nur auf normalverteilte Renditen anwendbar. Ganz Gegenteil: Shortfall-Maße sind dazu geeignet, sehr allgemeine Renditeverteilungen zu analysieren und zu bewerten.

Shortfall-Maße stellen aber nicht nur auf der theoretischen Ebene eine Verbesserung zum Markowitz-Ansatz dar. Gerade bei der praktischen Anwendung zeigen sich die Vorteile des Verfahrens. Bei der Risiko- und Performancemessung konkreter Anlageportfolios findet der Investor seine individuelle Risikoeinstellung sehr weitgehend berücksichtigt. Der Investor gibt zunächst die von ihm gewünschte Mindestrendite vor. Alle unterhalb der Mindestrendite liegenden Renditen stellen das Risiko eines unerwünschten Ausgangs der Kapitalanlage dar und nur sie gehen in die Berechnung der Risikomaße ein. Desweiteren wird durch die Wahl eines konkreten Shortfall-Maßes die Risikoaversion des Investors abgebildet. Je nach Wahl des Shortfall-Maßes und der Mindestrendite ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse für Risiko und Performance von Kapitalanlagen.

Der besondere Vorteil von Shortfall-Maßen liegt nun darin, daß auch Portfolios korrekt analysiert werden können, deren Renditeverteilung durch die Wirkung derivativer Instrumente asymmetrisch ist. Der immer zahlreicher werdende Einsatz von Optionen dürfte damit in Zukunft zu einer erheblichen Verbreitung von Shortfall-Maßen und deren Anwendung im Bereich der Vermögensverwaltung führen.

6 Literatur

ALBRECHT, PETER/ MAURER, RAIMOND/ STEPHAN, THOMAS G. (1995): Shortfall–Performance rollierender Wertsicherungsstrategien, in: Finanzmarkt und Portfolio Management, vol. 9, S. 197–209.

BAWA, VIJAY S. (1975): Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects, in: Journal of Financial Economics, Vol. 2, S. 95–121.

BAWA, VIJAY S. (1978): Safety–First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, June, S. 255–271.

BAWA, VIJAY S./ LINDENBERG, ERIC B. (1977): Capital Market Equilibrium in a Mean–Lower Partian Moment Framework, in: Journal of Financial Economics, Heft 5, S. 189–200.

EFRON, BRADLEY UND ROBERT J. TIBSHIRANI (1993), An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall, New York.

FISHBURN, PETER C. (1977): Mean–Risk Analysis with Risk Associated with Below–Target Returns, in: American Economic Review, Vol. 67, No.2, S. 116–126.

HARLOW, W. V. (1991): Asset Allocation in a Downside–Risk Framework, in: Financial Analysis Journal, September–October, s. 28–40.

HARLOW, W. V./ RAO, RAMESH K. S. (1989): Asset Pricing in a Generalized Mean–Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 24, No. 3, S. 285–311.

HULL, JOHN (1993): Options, Futures, And Other Derivative Securities, Prentice–Hall, Englewood Cliffs.

KEPPLER, MICHAEL (1990): Risiko ist nicht gleich Volatilität, in: Die Bank, Heft 11, S. 610–614.

LEE, WAYNE Y./ RAO, RAMESH K. S. (1988): Mean Lower Partial Moment Valuation and Lognormally Distributed Returns, in: Management Science, Vol. 34, No. 4, April, S. 446–453.

MARKOWITZ, HARRY (1952): Portfolio Selection, in: Journal of Finance, vol.7, S. 77-91.

METZLER ASSET MANAGEMENT (1996): Neue Risikomaße im Asset-Management: Die Volatilität auf dem Rückzug, macroScope special, August 1996.

ROY, A. D. (1952): Safety-First and the Holding of Assets, in: Econometrica, vol. 20, S. 431-449.

SCHRÖDER, MICHAEL (1996): Value-at-Risk - Proposals on a Generalization - , ZEW-Discussion Paper No. 96-12

SHARPE, WILLIAM F. (1994): The Sharpe Ratio: Properly used, it can improve investment management, in: Journal of Portfolio Management, Fall, S. 49–58.

SORTINO, FRANK A. / LEE N. PRICE (1994): Performance Measurement in a Downside Risk Framework, in: Journal of Investing, Fall 1994, S. 59-64.

ZIMMERMANN, HEINZ (1994): Editorial: Reward–to–Risk, in: Finanzmarkt und Portfolio Management, Jg. 8, Heft 1, S. 1–6.