Discussion Paper

Discussion Paper No. 95-05

Steuer-Klientel-Effekte: Realität oder Illusion?

Wolfgang Bühler / Steffen Rasch

ZEW

Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung GmbH

International Finance Series

Steuer-Klientel-Effekte: Realität oder Illusion?

Wolfgang Bühler* und Steffen Rasch**

Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW)

April 1995

* Lehrstuhl für Finanzierung an der Universität Mannheim und ZEW
** ZEW Mannheim

Zusammenfassung

Die empirische Überprüfung von steuerlich bedingten Marktsegmentationen (Steuer-Klientel-Effekten) ergab an den DM-Anleihemärkten asymmetrische Ergebnisse für Anleihen in Abhängigkeit von deren Kurshöhe. Im vorliegenden Beitrag werden diese Resultate durch Friktionen bei der Bildung von Substitutionsportefeuilles erklärt. Insbesondere kann ein bislang unbeachteter „methodischer Kuponeffekt“ gezeigt werden, der sich mit steuerlichen Effekten überschneidet, so daß letztere teilweise Illusion sind. Die Diskussion basiert auf analytischen Lösungen für Grenzfälle bei der Ermittlung optimaler Portefeuilles nach Steuern unter Verwendung linearer Programme. Der vorliegende Beitrag umfaßt außerdem eine Systematisierung aller denkbaren Lösungsstrukturen in Substitutionsportefeuilles sowie eine entsprechende empirische Analyse aller beobachteten Fälle.

Summary

A recent empirical investigation of Tax-Induced market segmentation (so called Tax clientele effects) in the German bond market shows asymmetrical findings for bonds depending on their price level. Our study explains these results with respect to problems in building substitution portfolios. Especially, we show a „methodological coupon effect“ that was ignored so far, although it overlaps with the well-known Tax-Induced coupon effect. So the latter effect may be an illusion, in specific cases. Our discussion is based on analytical solutions for border-line cases of linear programs used to find optimal after-tax portfolios. More than this, our study contains a systematic discussion of all possible portfolio structures and even a corresponding empirical analysis of any observed case.

1. Einleitung

Die asymmetrische Besteuerung von Zinseinkünften und Kursgewinnen bei Privatanlegern kann zu Marktsegmentationen führen. Solche „Steuer-Klientel-Effekte" ließen sich unter Verwendung von preisminimalen *Substitutionsportefeuilles* für die DM-Anleihemärkte zeigen.[1] Allerdings traten dabei *asymmetrische Ergebnisse* im Hinblick auf die Kurshöhe der als Referenzgröße ausgewählten Anleihe auf. Ziel dieses Beitrags ist die Erklärung dieses Phänomens.

Der Schlüssel dazu liegt in einer bislang unbeachtet gebliebenen Asymmetrie im Bildungsalgorithmus für Substitutionsportefeuilles. Da die Kuponhöhe der Referenzanleihe den entscheidenden Punkt darstellt, soll hier fortan von einem *methodischen Kuponeffekt* gesprochen werden. Dieses Phänomen darf nicht mit den bereits bekannten steuerlichen oder rechnerischen Kuponeffekten verwechselt werden.

Die Ermittlung von Substitutionsportefeuilles läßt sich für empirische Zwecke nur sinnvoll mit numerischen Verfahren durchführen. In der bisherigen theoretischen Diskussion mangelt es sowohl an einer vollständigen Demonstration aller möglichen Lösungsstrukturen wie an der Beachtung der gerade erwähnten verfahrensimmanenten Asymmetrien. Hier soll erstmals eine *umfassende Diskussion aller auftretenden Strukturen* stattfinden. Im Hinblick auf das Oberziel der Analyse von Asymmetrien bei Steuer-Klientel-Effekten soll dazu der Einfluß steuerkorrigierter Zahlungsreihen auf die optimale Lösung analysiert werden. Für die beiden wichtigen Randfälle in der Menge aller möglichen Lösungsstrukturen werden hier erstmals analytische Ergebnisse gezeigt.

Der Einfluß des methodischen Kuponeffektes auf die Zusammensetzung und den Preis eines Substitutionsportefeuilles kann nur im Einzelfall ermittelt werden. Für empirische Untersuchungen ist deshalb die Aufschlüsselung von Ergebnissen nach den vorhandenen Lösungsstrukturen von Bedeutung. Deren Auftreten hängt von den aktuellen Marktpreisen der umlaufenden Anleihen ab. Zusätzlich zur theoretischen Diskussion von Substitutionsportefeuilles werden hier deshalb erstmals Lösungsstrukturen auch empirisch untersucht. Insbesondere wird erfaßt, wieviele Anleihen zum Portefeuille gehören, wie sich deren Fälligkeiten gliedern und welche Kuponhöhen zu beobachten sind. Der Einfluß dieser Werte auf den Preis des jeweiligen Substitutionsportefeuilles steht dabei im Mittelpunkt des Interesses. Die auf-

---

1 Vgl. BÜHLER/RASCH (1994).

tretenden Fälle des Verlaufes dieser *Preis-Steuersatz-Funktion* werden explizit gezeigt und damit zugleich erstmals Zusammensetzungen von Substitutionsportefeuilles systematisch analysiert.

Im nachfolgenden zweiten Teil wird das Grundprinzip der Bildung von Substitutionsportefeuilles anhand der üblicherweise diskutierten Grundfälle dargelegt und deren Verwendung in bisherigen Studien gezeigt. Es folgt eine grundlegende Behandlung der *Annahmen* bei der Bildung von Substitutionsportefeuilles.

Ziel des dritten Teils ist die Systematisierung aller denkbaren Strukturen von Substitutionsportefeuilles und deren Einflüsse auf die optimalen Lösungen. Im Mittelpunkt steht dabei der Zusammenhang zwischen dem Preis des Substitutionsportefeuilles und dem Marktpreis der substituierten Anleihe bei Variation des Steuersatzes. Für die beiden wichtigen Grenzfälle werden analytische Lösungen gezeigt. Die übrigen Varianten finden eine kürzere Behandlung.

Der vierte Teil enthält den Ansatz zur empirischen Ermittlung von Substitutionsportefeuilles sowie die Beschreibung der verfolgten Vorgehensweise. Im fünften Teil erfolgt dazu die empirische Analyse tatsächlich ermittelter Substitutionsportefeuilles. Die im Rahmen der Überprüfung von Steuer-Klientel-Effekten aufgetretenen Fälle werden exemplarisch demonstriert. Die Zusammensetzungen von Substitutionsportefeuilles sowie die Verläufe der Preis-Steuersatz-Funktion werden für alle Grundfälle explizit gezeigt und analysiert.

Der sechste und letzte Teil faßt die wesentlichen Erkenntnisse und Ergebnisse zusammen.

2. Duplikationsproblematik

2.1 Standardfälle der Bildung von Substitutionsportefeuilles

Für den hier betrachteten Bereich der Anleihemärkte bedeutet die Bildung eines Substitutionsportefeuilles, die Zahlungsreihe einer beliebig ausgewählten Anleihe A_0 durch eine Kombination aus anderen Anleihen zu reproduzieren. Mit der Vorgabe einer Zahlungsreihe wird das Problem der Zielauswahl hinsichtlich des Planungshorizonts wie der Strukturierung zukünftiger gewünschter Rückflüsse in einem vorausgehenden Schritt durch den Anleger bereits gelöst.[2]

2 Vgl. FRANKE (1983), S. 49.

Es wird eine Anleihe A_0 mit dem Kupon C_0 zu dem Marktpreis P_0 ausgewählt und deren Zahlungsreihe

$$-P_0 \;, C_0 , \ldots, C_0 , (100 + C_0) \tag{1}$$

substituiert. Die Anleihe A_0 wird nach einer Restlaufzeit von n Jahren im Zeitpunkt T_0 endfällig zu 100 zurückgezahlt. Die Anzahl der zu substituierenden Stücke von A_0 wird auf Eins normiert. In den nachfolgenden Darstellungen ist Ganzzahligkeit von n unterstellt.

a) Der naheliegende Fall soll als *Doppellösung* bezeichnet werden: Stimmen Zahlungstermine und Restlaufzeiten von A_0 sowie von mindestens zwei weiteren Anleihen A_1 und A_2 exakt überein, so existiert ohne die Möglichkeit von Leerverkäufen eine Lösung für ein Substitutionsportefeuille unter der Bedingung

$$C_1 < C_0 < C_2 . \tag{2}$$

C_0 läßt sich als Linearkombination konstruieren:

$$C_0 = x_1 \;\; C_1 + x_2 \;\; C_2 . \tag{3}$$

Dabei gilt für die Anteile x_1 und x_2

$$x_1 + x_2 = 1 . \tag{4}$$

Einsetzen der Gleichung (4) in (3) und Auflösen ergibt für die Substitution eines Stückes von A_0 eine zu erwerbende Stückzahl von

$$x_1 = \frac{C_2 - C_0}{C_2 - C_1} \tag{5}$$

für A_1 und entsprechend für A_2 von

$$x_2 = \frac{C_0 - C_1}{C_2 - C_1} . \tag{6}$$

Die Bildung eines Substitutionsportefeuilles ist hier leicht nachvollziehbar und erfordert kein numerisches Verfahren. Notwendig ist jedoch eine sehr spezielle Auswahl von verfügbaren Anleihen.

b) Als scheinbar allgemeiner Fall für die Bildung eines Substitutionsportefeuilles wird vielfach eine Zusammenstellung von Anleihen demonstriert, in der die

Restlaufzeiten *gestaffelt* vorliegen. In jedem Zahlungszeitpunkt von A_0 ist dann genau eine Anleihe fällig. Diese Art von Kombination soll deshalb fortan als Staffellösung bezeichnet werden. Die Stückzahlen x_i ergeben sich durch rekursives Auffüllen der Referenzzahlungsreihe, rückwärtsgehend vom Zeitpunkt T_0, der Fälligkeit von Anleihe A_0. Ein idealtypisches Beispiel ergibt sich aus folgender Konstellation:

Tabelle 1: Beispiel für einen Bestand an umlaufenden Anleihen

Anleihe	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3 = T_0$
A_0	-100,00	+8,00	+8,00	+108,00
A_1	-94,85	+6,00	+6,00	+106,00
A_2	-96,43	+6,00	+106,00	
A_3	-98,15	+106,00		

Das Preisgefüge ist für dieses Beispiel aus einer über alle Laufzeiten auf dem Niveau 8 % p. a. flachen Renditestrukturkurve abgeleitet worden. Ein Substitutionsportefeuille zum Ersatz von A_0 ergibt sich nun durch rekursives Auffüllen von dessen Zahlungsreihe, beginnend mit der längsten Restlaufzeit. Von A_1 werden zur Erzeugung einer Zahlung in Höhe von 108 in $t = 3$ daher

$$x_1 = \frac{108}{106} \cong 1{,}0189 \tag{7}$$

Stücke erworben. In $t = 2$ ergibt sich danach eine Deckungslücke in Höhe von

$$8 - (1{,}0189 \cdot 6) = 1{,}8868. \tag{8}$$

Durch den Erwerb von

$$x_2 = \frac{1{,}8868}{106} \cong 0{,}0178 \tag{9}$$

Stücken von A_2 wird diese geschlossen. In $t = 1$ wird schließlich der noch fehlende Betrag von

$$8 - (1{,}0189 \cdot 6 + 0{,}0178 \cdot 6) = 1{,}7800 \tag{10}$$

durch den Kauf von

$$x_3 = \frac{1{,}7800}{106} \cong 0{,}0168 \tag{11}$$

Stücken ausgeglichen. Damit enthält das Substitutionsportefeuille folgende Bestandteile:

Tabelle 2: Beispiel eines Substitutionsportefeuilles bei Vorliegen einer Staffellösung

Anleihe	x_i	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A_1	1,0189	-96,6354	+6,1132	+6,1132	+108,0000
A_2	0,0178	-1,7165	+0,1068	+1,8868	
A_3	0,0168	-1,6481	+1,7800		
Summe		-100,0000	+8,0000	+8,0000	+108,0000

Die Nettorückflüsse des Substitutionsportefeuilles entsprechen exakt denen von A_0, sein Preis als Summe in der Spalte für $t = 0$ ist ebenfalls 100. Wie bei der zuvor diskutierten Doppellösung ist wiederum eine spezielle Auswahl von Anleihen im Hinblick auf deren Restlaufzeiten und Kuponhöhen notwendig. Gleichwohl beschränken sich fast alle bisherigen Darstellungen auf diese beiden Varianten.

2.2 Duplikationsproblematik in bisherigen Studien

In einer Reihe von Studien ist allein die Doppellösung Basis der Untersuchungen. Die Grundidee findet sich bei LITZENBERGER/ROLFO (1984a und 1984b), die ausschließlich auf dieser Kombinationsmöglichkeit[3] aufbauend Steuer-Klientel-Effekte analysieren. Auch hier beschränkt sich die Datenbasis zwangsläufig auf eine Auswahl von Dreiergruppen aus Anleihen mit identischen Fälligkeitsterminen.[4] Analog zu LITZENBERGER/ROLFO verwenden auch JORDAN/JORDAN (1991) sowie RONN/SHIN (1992) „Triplets", in denen die Anleihe mit dem mittleren Kupon durch die übrigen beiden substituiert wird.[5]

Die Konstruktion eines Substitutionsportefeuilles in Form einer Staffellösung wird bei FRANKE (1983) durch einen iterativen Algorithmus beschrieben.[6] Die Erstellung erfolgt durch sukzessives Ausrechnen und Wiedereinsetzen von zu erwerbenden Stückzahlen, also quasi „von Hand". Auf diejenigen Fälle, deren Strukturen Übertragungsmechanismen erfordern und die in der Realität an den Märkten die große Mehrzahl bilden, wird nicht eingegangen. Dieser Ansatz basiert auf der impliziten Annahme, daß ein Substitutionsportefeuille immer in der Struktur einer exakten

3 Vgl. LITZENBERGER/ROLFO (1984a), S. 339, wie auch in dies. (1984b), S. 6.

4 Vgl. LITZENBERGER/ROLFO (1984a), Tabelle 1 auf S. 344.

5 Vgl. JORDAN/JORDAN (1991), S. 137; RONN/SHIN (1992), S. 8 f. und Tabelle 2 auf S. 12.

6 Vgl. FRANKE (1983), S. 55, mit dem Beispiel auf den Seiten 52 ff.

Restlaufzeitstaffel zustande kommt.[7] Das Arbitrageproblem wird ausdrücklich auf den Fall verengt, „die *niedriger verzinsliche* Anleihe so mit kürzerfristigen Anleihen zu einem Portefeuille zu kombinieren, daß dieses Portefeuille in jedem zukünftigen Zeitpunkt genausoviel Geld abwirft wie die *höher verzinsliche* Anleihe."[8]

Die Berücksichtigung von Steuern erfolgt bei FRANKE (1983) dagegen nur aus Sicht institutioneller Anleger, wofür ein grundsätzlich anderes Steuersystem modelliert werden muß.[9] UHLIR/STEINER (1986) diskutieren arbiträre Zahlungsreihen *nach Steuern* aus Sicht des Privatanlegers. Als Duplikationsvoraussetzung wird jedoch auch hier ausdrücklich das Vorhandensein einer Kette von Anleihen postuliert, deren Fälligkeitsstruktur den zu ersetzenden Zahlungsterminen entspricht.[10]

In einer Studie von KATZ/PRISMAN (1992) werden als Beispielfälle für kongruent zu konstruierende Zahlungsreihen sogar explizit nur Zusammenstellungen aus Anleihen mit exakt übereinstimmenden Kuponterminen gewählt.[11] Lückenhafte Lösungsstrukturen, die verschiedene Dominanzen und damit Steuer-Klientel-Effekte zeigen können, werden wegen des Ausschlusses von Mittelübertragungsmöglichkeiten tatsächlich jedoch ignoriert.

LASSAK (1992) diskutiert zwar den Fall der Bildung von Substitutionsportefeuilles mit Kassenhaltung und später auch unter Leerverkaufsbeschränkungen allgemein, allerdings ohne über die oben hier gezeigten Spezialfälle hinauszugehen.[12] Die verwendete Datenbasis wird für empirische Zwecke dann auch auf den Bestand an Anleihen mit übereinstimmenden Kuponterminen beschränkt.[13] Steuerliche Effekte bleiben ausgeklammert.[14]

Die bislang ausführlichste theoretische Systematisierung von Duplikationsmöglichkeiten findet sich bei SAUER (1989). Auch hier wird die Betrachtung jedoch auf exakte Kongruenzen ohne Mittelübertragungen und ohne Stückzinsermittlung eingeschränkt. Dieses unvollständige System wird nochmals reduziert auf die Fälle der

---

7 Vgl. FRANKE (1983), S. 66.

8 FRANKE (1983), S. 51; Hervorhebungen nicht im Original.

9 Vgl. FRANKE (1983), S. 58 ff.

10 Vgl. UHLIR/STEINER (1986), S. 40.

11 Vgl. KATZ/PRISMAN (1992), Tabellen auf den Seiten 11 ff.

12 Vgl. LASSAK (1992), S. 43 und 61.

13 Vgl. LASSAK (1992), S. 117, S. 143 und S. 154.

14 Vgl. LASSAK (1992), S. 165.

Triviallösung[15] und der Doppellösung sowie der Staffellösung.[16] Bei Auftreten einer Lücke in dieser Staffel werden Leerverkäufe als notwendig postuliert.[17] Steuerliche Aspekte finden nur am Rande in einer Einschätzung Erwähnung.[18]

Die Systematisierung *aller* Möglichkeiten der Bildung von Substitutionsportefeuilles wird Gegenstand des 3. Abschnitts sein. Dabei erfolgt zugleich eine Analyse der Veränderung des Preises eines Substitutionsportefeuilles bei Berücksichtigung einer asymmetrischen steuerlichen Behandlung von Zinseinkünften und Kursgewinnen.

In der *empirischen* Anwendung werden in zahlreichen Studien numerisch Substitutionsportefeuilles gebildet, die Art der Zusammensetzung aus tatsächlich umlaufenden Anleihen wird jedoch kaum gezeigt. So finden Substitutionsportefeuilles fast ausschließlich als Black Box Verwendung.[19]

Die Zusammensetzung nach Papieren und Stückzahlen wird nur bei HODGES/SCHAEFER (1977) explizit an einem Beispiel gezeigt.[20] Strukturbedingte Friktionen können allerdings in diesem Ansatz nicht erkannt werden, da die Optimierung nur in Form der *Umschichtung eines bereits bestehenden* Portefeuilles stattfindet. Veränderungen ergeben sich durch Austausch einzelner Anleihen aus diesem Portefeuille gegen solche aus dem gesamten umlaufenden Bestand. Im dort gezeigten Beispiel ist die Umschichtung nicht durchgreifend. HODGES/SCHAEFER (1977) führen dies darauf zurück, daß die Ausgangskonstellation bereits dicht an der optimalen Lösung gelegen habe.[21] Dabei wird die Bildung von Substitutionsportefeuilles erheblich erleichtert durch die Zulassung von Verkäufen bis zur Höhe des Anfangsbestandes, dessen Festsetzung allerdings unerklärt bleibt. Außerdem wird *verzinslicher* Mittelvortrag zugelassen.[22] Die damit verbundene Gefahr des zu günstigen Errechnens des Preises für ein Substitutionsportefeuille wird für gering erklärt, wobei diese Einschätzung auf der Betrachtung des Demonstrationsfalles für

15 Zur Triviallösung siehe unten Abschnitt 3.1.

16 Vgl. SAUER (1989), S. 6 ff.

17 Vgl. SAUER (1989), S. 12. Diese Notwendigkeit ergibt sich bei zugelassener Kassenhaltung nicht; Vgl. Abschnitt 3.3.

18 Vgl. SAUER (1989), S. 103.

19 So bei DERMODY/PRISMAN (1988), S. 897; PRISMAN (1990b), S. 129 ff.

20 Vgl. HODGES/SCHAEFER (1977), S. 252.

21 Vgl. HODGES/SCHAEFER (1977), S. 253.

22 Vgl. HODGES/SCHAEFER (1977), S. 246.

zwei alternative Zinssätze von 5 und 9 % beruht.[23] Eine allgemeine Diskussion erfolgt nicht. Es bleibt auch offen, inwiefern der Ansatz eines einheitlichen zukünftigen Wiederanlagezinses konsistent ist mit der Schätzung einer Zins*struktur* aus den identischen Daten in demselben Abschnitt. Die Beobachtungen zur strukturellen Zusammensetzung von Substitutionsportefeuilles erscheinen auf Grund der Betrachtung von Extremfällen nicht verallgemeinerungsfähig.

In weiteren Arbeiten unter Verwendung von preisminimalen Arbitrageportefeuilles geht SCHAEFER (1981, 1982a, 1982b) nicht mehr auf die Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles ein. Allerdings erscheint ein Hinweis auf die Asymmetrie des Duplikationsproblems bei - dort noch nicht so bezeichneten - Staffellösungen.[24] Auch in den auf SCHAEFER basierenden Ansätzen von RONN (1987) und KATZ/PRISMAN (1991) bleibt die Zusammensetzung von Substitutionsportefeuilles unbeachtet.

Explizite Darstellungen von Substitutionsportefeuilles fehlen bislang fast vollständig. Im fünften Abschnitt werden deshalb die gefundenen Lösungsstrukturen graphisch und tabellarisch dokumentiert und systematisch untersucht. Es zeigt sich ein Zusammenhang zwischen der Struktur und dem Preis des Substitutionsportefeuilles.

2.3 Annahmen bezüglich der Substitutionsanleihen

Zur Klarstellung der Terminologie werden an dieser Stelle zunächst folgende Definitionen getroffen: Zu ersetzen ist im Zeitpunkt $t = 0$ stets eine in $t = T_0$ zu 100 rückzahlbare Anleihe A_0 mit einem Kupon C_0, die noch mindestens eine zukünftige Zahlung erbringt. Als Bestand, aus dem die für die Substitution verwendbaren Anleihen stammen (Substitutionspotential), soll die von Fall zu Fall neu definierbare Menge aus den Anleihen A_i mit $i = 1, ..., (n+1)$ gelten. Eine Anleihe A_i besitzt dabei den Kupon C_i und ist zu 100 rückzahlbar in einem Zeitpunkt t_i, bis zu dem noch m_i Kupontermine in der Restlaufzeit auftreten.

Hier wird die Bildung von Substitutionsportefeuilles unter folgenden Annahmen diskutiert:

Annahme 1: Es bestehen keine Unterschiede bezüglich Bonität, Liquidität, Kündigungs- und Sonderrechten (*homogenes Substitutionspotential*).

---

23 Vgl. HODGES/SCHAEFER (1977), S. 253.

24 Vgl. SCHAEFER (1982a), S. 135 und S. 150.

Annahme 2: Alle Anleihen besitzen Zahlungstermine in periodischen Abständen. Die Daten können jedoch individuell voneinander abweichen (*Terminperiodizität*).

Annahme 3: Unverzinslicher Mittelvortrag (*Kassenhaltung*) ist zugelassen. Mittelrücktrag bleibt untersagt (*Kreditaufnahmeverbot*).

Annahme 4: Short-Positionen sind nicht zugelassen (*Leerverkaufsverbot*).

Annahme 5: Zinszahlungen unterliegen einem individuellen Einkommensteuersatz, Kursveränderungen bleiben dagegen steuerlich unbeachtlich. (*Asymmetrische Besteuerung*)

Annahme 6: Transaktionskosten entstehen proportional zu den erworbenen Nominalwerten (*Stückzahlproportionalität der Transaktionskosten*).

Annahme 1 schließt alle marktlichen Effekte aus, die die Kurse oder die Zahlungsreihen der betrachteten Anleihen beeinflussen können. Ausnahme ist die Besteuerung, die zu den erwähnten Marktsegmentationen führen kann.

Das zentrale Problem der Bildung von Substitutionsportefeuilles liegt in Annahme 2 begründet. Periodische, in der Regel jährliche, Zahlungsweise kann realistischerweise unterstellt werden. Vielfach wird damit jedoch implizit die Restriktion verbunden, daß vom *Betrachtungszeitpunkt* aus gesehen nur periodische Abstände auftreten. Eine solche *Terminkongruenz* würde die gesamte Stückzinsproblematik irrelevant werden lassen. Tatsächlich finden sich in der Realität jedoch nur wenige Kalenderdaten, an denen zumindest ein größerer Anteil aller umlaufenden Anleihen einen Kupontermin aufweist. Sobald nun Zahlungstermine nicht mehr kongruent sind, können Substitutionsportefeuilles nur noch gebildet werden, wenn Mittelübertragung zwischen zukünftigen Zeitpunkten zugelassen wird.

Für die Mittelübertragung muß eine Annahme über den relevanten zukünftigen Zinssatz getroffen werden. Dies geschieht hier durch Annahme 3 in der denkbar schärfsten Form. Ansonsten müßte vom Prinzip der exakten Duplikation von Zahlungsreihen abgewichen werden, da zukünftige Zinssätze nicht mit Sicherheit bekannt sind. Falls also im Substitutionsportefeuille eine Anleihe verwendet wird, die einen früheren Zahlungstermin als A_0 aufweist, werden die überschüssigen Mittel vorgetragen. Falls eine Anleihe A_i später zahlen sollte, müßte der Zahlungsbetrag rückgetragen werden. Das bedeutet den vorzeitigen Verkauf von A_i oder im Zahlungszeitpunkt von A_0 die Aufnahme eines Kredits, der durch die später erfolgende Einnahme aus A_i abgelöst würde.

Es ist offensichtlich, daß das Prinzip der kongruenten Erstellung von Zahlungsreihen dann nur noch unter Unsicherheit gewährleistet wäre. Zukünftige Kurse werden deshalb im weiteren aus der Betrachtung ausgeschlossen, indem eine Buy-and-hold-Strategie unterstellt wird. Der Rücktrag von Mitteln, der ja eine implizite Kreditaufnahme darstellt, wird gänzlich unterbunden. Allein Vortrag von Zahlungsbeträgen bleibt zulässig, jedoch nur in Form von Kassenhaltung, also unverzinslich. Diese Maßnahme kann als stets realisierbare Handlungsalternative angesehen werden und führt für die hier verfolgten Zwecke zu Substitutionsportefeuilles, die durch die erzwungene Unverzinslichkeit von temporären Kassenbeständen einer scharfen Abschätzung unterliegen. Der Preis solcher Substitutionsportefeuilles wird tendenziell zu hoch ausfallen, dafür hängt die Zahlungsreihe nicht von der zufälligen Entwicklung künftiger Zinssätze ab. Der Nachteil dieser äußerst scharfen Abschätzung besteht darin, daß Verbesserungsmöglichkeiten in denjenigen Fällen nicht erkannte werden, in denen die Struktur des Substitutionsportefeuilles hohe Kassenhaltungsvolumina erfordert.

Die Betrachtung von Zahlungsterminen bei den Anleihen des Substitutionspotentials verschiebt sich nun von diskreten Zahlungszeitpunkten hin zu Zeitintervallen. Da Mittelvortrag zugelassen ist, spielt es keine Rolle, ob eine Zahlung aus einer Anleihe A_i genau an demselben Tag wie bei der Referenzanleihe A_0 oder bereits bis zu einem Jahr *früher* erfolgt. Hinsichtlich der resultierenden Kongruenz besteht kein Unterschied. Dies wird hier als *Intervallkongruenz* bezeichnet. Daher wird zweckmäßig ein Zahlungsintervall $]I_t]$ als Zeitraum zwischen zwei Zahlungsterminen von A_0 definiert, wobei jeweils die obere Grenze eingeschlossen wird. Die untere Intervallgrenze bleibt ausgeschlossen, da sonst die vorangehende Zahlung in der Zahlungsreihe von A_0 bereits im davor liegenden Zahlungszeitpunkt zu berücksichtigen wäre.

Aus den Zahlungsreihen der im Substitutionsportefeuille enthaltenen Papiere fließen daher Einnahmen, die teilweise direkt kongruent zur Zahlungsreihe von A_0 sind, und solche Rückflußanteile, die zunächst wiederangelegt werden müssen, um Kongruenz herzustellen. Der Umfang der notwendigen Kassenhaltung, und damit eine Abschätzung entgangener Zinserträge, ist jedoch nur strukturspezifisch bestimmbar. Für ein bestimmtes Substitutionsportefeuille könnte daraus ein *kritischer Wiederanlagezins* errechnet werden, von dessen Überschreiten an das Substitutionsportefeuille zur preisgünstigeren Alternative wird. Die Einschätzung dieses Wiederanlagezinses bietet dem Investor die Möglichkeit, auch scheinbar zu teure Substitutionsportefeuilles zu nutzen, falls seine individuelle (Haben-) Zinserwartung noch über den kritischen Wiederanlagezins hinausgeht. Eine exakte Duplikation ist wegen der erwartungsimmanenten Unsicherheit dann allerdings nicht mehr gegeben. Insofern wird dieses Konzept hier nicht weiter verfolgt.

Bleiben gemäß Annahme 4 Short-Positionen untersagt, so entsteht die Notwendigkeit von Mittelübertragungen selbst bei Vorhandensein eines vollständigen Substitutionspotentials im Falle der Substitution der Anleihe *mit dem niedrigsten Kupon in der längsten Restlaufzeitklasse*. Für die Bildung von Substitutionsportefeuilles böten sich erheblich mehr Möglichkeiten, wenn Long- *und* Short-Positionen gehalten werden dürften. Dann wären synthetische Zero-Bonds erzeugbar. Dabei sind zwingend Long- und Short-Positionen zu kombinieren, um aus zwei inkongruenten Zahlungsreihen die Kuponzahlungen zu neutralisieren.[25] Neben der unrealistischen Annahme der steuerlichen und transaktionskostenmäßigen symmetrischen Behandlung von Long- und Short-Positionen erfordert letztlich jedoch auch dieser Ansatz exakt übereinstimmende Zahlungstermine für alle Zeitpunkte, mit Ausnahme der Fälligkeit.

Damit sind institutionelle Rahmenbedingungen, wie sie etwa am deutschen Rentenmarkt herrschen, realitätsnah abgebildet. Notwendige Abschätzungen fallen so scharf wie nur möglich aus, und zwar stets *zuungunsten des Substitutionsportefeuilles*. Hinzu tritt nun die Berücksichtigung der Einkommensteuer aus Sicht eines Privatanlegers (Annahme 5). Transaktionskosten werden in der empirischen Untersuchung in realistischer Weise modelliert, beeinflussen aber die theoretische Ermittlung der Stückzahlen x_i nicht und werden daher im 3. Abschnitt auch nicht berücksichtigt.

Das Substitutionspotential braucht nicht vollständig zu sein in dem vielfach implizit unterstellten Sinne, daß in jedem Zeitpunkt, in dem irgendeine Anleihe eine Zahlung leistet, mindestens eine weitere Anleihe fällig wird. Die zentrale Friktion entsteht aus den Annahmen 2 und 3. Die Herstellung kongruenter Zahlungsreihen kann nur durch Substitutionsanleihen erfolgen, die *nicht später* als A_0 zahlen. Zur Abdeckung der ersten Kuponzahlung aus A_0 muß daher eine Anleihe im Substitutionsportefeuille vorhanden sein, die im ersten Intervall $]I_1]$ eine Zahlung leistet. Im Gegensatz zu allen Folgeintervallen kann $]I_1]$ jedoch kleiner als ein Jahr sein, da dieses Anfangsintervall dem Zeitraum zwischen dem Erwerbstag und der ersten Zahlung aus A_0 entspricht. Dabei kann es sich eventuell um nur wenige Tage handeln, wenn nämlich eine Anleihe A_0 zu substituieren versucht wird, die nur kurze Zeit nach dem Stichtag bereits einen Zahlungstermin besitzt. Beispielsweise könnte

25 Vgl. CAKS (1977), S. 105 ff., sowie LIVINGSTON (1982), S. 181 f.

man am Stichtag 12.11. eine Anleihe mit Kupontermin 1.12. auswählen. Möglicherweise existiert dann im Substitutionspotential keine Anleihe, die in diesem Anfangsintervall einen Kupontermin besitzt oder dort fällig wird. Mangels Rücktragsmöglichkeit kann dann kein Substitutionsportefeuille gebildet werden.

Es verbleiben damit zwei Hauptprobleme für die Bildung von Substitutionsportefeuilles unter den gesetzten Bedingungen:

1. Das *Problem des ersten Kupontermins* besteht darin, mindestens eine Anleihe in das Substitutionsportefeuille aufnehmen zu müssen, die im ersten Intervall, also zwischen dem Erwerbstag und dem ersten Kupontermin von A_0, eine Zahlung leistet.

2. Zur Abdeckung der *Schlußzahlung* von A_0 muß mindestens eine Anleihe in das Substitutionsportefeuille aufgenommen werden, die nicht später zahlt als die Referenzanleihe fällig wird. Die Zahlung sollte jedoch auch nicht wesentlich früher erfolgen, um den Betrag an entgehenden Zinseszinsen zu minimieren.

Unter Berücksichtigung von Steuern kompliziert sich die Diskussion der Bildung von Substitutionsportefeuilles. Betrachtet man die Zahlungsreihen aller Anleihen als Spaltenvektoren einer Matrix, die zeilenweise einen Kalender aufspannt, so wäre die Einführung einer solchen Steuer durch Multiplikation der Matrix mit einem Faktor darstellbar. Die Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles bliebe dann im Vergleich zum Vor-Steuer-Fall unberührt. Dies scheitert jedoch bereits an den steuerfreien Kapitalrückzahlungen. Die asymmetrische Besteuerung von Kapitaleinkünften verschärft diese Problematik noch. Für die hier untersuchten Zahlungsreihen von Anleihen bedeutet dies die Reduktion von Zinszahlungen um einen Steuersatz s, während Kursgewinne und Kapitalrückzahlungen ungeschmälert vereinnahmt werden können. Die Bildung von Substitutionsportefeuilles ist wegen dieser steuerrechtlich asymmetrischen Behandlung *keine* lineare Transformation der Vor-Steuer-Situation mehr. Auf die verschiedenen Elemente der betroffenen Zahlungsreihen werden unterschiedliche Reduktionsfaktoren angewendet.

Im Rahmen dieser Untersuchung war die ursprüngliche Frage des Einflusses der Bildung von Substitutionsportefeuilles auf das Erscheinungsbild von Steuer-Klientel-Effekten. Von besonderem Interesse ist deshalb, wie sich bei Auftreten bestimmter Lösungsstrukturen der Preis des Substitutionsportefeuilles in Abhängigkeit des betrachteten Steuersatzes ändert. Dazu wird die Preis-Steuersatz-Funktion

$$P_{SP}(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq 60\,\% \tag{12}$$

herangezogen. Von Bedeutung sind dabei die Fälle, in denen sich für eine bestimmte Lösungsstruktur entweder

$$\frac{dP_{SP}(s)}{ds} > 0 \tag{13}$$

oder

$$\frac{dP_{SP}(s)}{ds} < 0 \tag{14}$$

für das betrachtete Intervall ergibt. In diesen Fällen verändert sich wegen des konstanten Marktpreises der Referenzanleihe die relative Vorteilhaftigkeit aus Sicht verschiedener Klientelen deterministisch. Im folgenden soll diese Überlegung für die wichtigsten Lösungsstrukturen ergänzend diskutiert werden.

3. Analytische Lösungen

Unter den hier gesetzten Prämissen, insbesondere der Unterbindung von Leerverkäufen, bleibt die Ermittlung von Substitutionsportefeuilles für Anleihen mit relativ hohen und mit relativ niedrigen Kupons ist *nicht länger symmetrisch* möglich. Zur Bildung eines Substitutionsportefeuilles für eine Hochkuponanleihe ist, bei einem ausreichenden Bestand an umlaufenden Anleihen, stets eine *Staffellösung* erzielbar. Solche Lösungen erfordern praktisch *keine Kassenhaltung*.

Für eine Niedrigkuponanleihe ist dagegen häufig das Heranziehen einer *Einzellösung* erforderlich. Dies läßt sich unmittelbar einsehen für den Grenzfall der Anleihe mit dem niedrigsten Kupon des aktuellen Bestandes. Das Substitutionsportefeuille muß dann *zwingend* eine (oder mehrere) Anleihe(n) *mit höherem Kupon* enthalten. Ein Problem für die Verwendung von Substitutionsportefeuilles in der empirischen Forschung ergibt sich daraus insofern, als Einzellösungen mit höherem Kupon notwendigerweise *Mittelübertragung* erfordern. Da hier Kassenhaltung unterstellt wird, sind solche Lösungsstrukturen wegen unberücksichtigter Wiederanlagezinsen benachteiligt und werden deshalb *tendenziell zu hohe Preise für das Substitutionsportefeuille* zeigen. Dieses Phänomen basiert allein auf der Auswahl der zur Verfügung stehenden Kupons und wird daher fortan als *methodischer Kuponeffekt* bezeichnet.

Diese hier erstmalig analysierte Beobachtung ist rein methodenbedingter Natur und darf nicht mit den schon bekannten rechnerischen oder steuerlichen Kuponeffekten verwechselt werden. Gleichwohl kommt es zu Überschneidungen methodischer und steuerlicher Einflüsse, wobei der beobachtete Gesamteffekt sich nicht in isolierbare Einzeleinflüsse aufspalten läßt. Teilweise sind vermeintliche Steuer-Effekte dann nur *Illusion*, da tatsächlich datenbestandsabhängige Friktionen vorliegen. Die Auswirkungen auf die empirisch ermittelten Ergebnisse sind analytisch nicht exakt zu bestimmen. Abhängig von den vorhandenen Kuponhöhen, Restlaufzeiten und Zahlungsterminen sowie den gewählten Steuersätzen kommt bei jedem Substitutionsportefeuille ein unterschiedliches Kassenhaltungsvolumen zustande, so daß sich die zu erwerbende Stückzahl und damit der Preis des Substitutionsportefeuilles entsprechend unterschiedlich, wenn auch tendenziell erhöht, gestalten.

3.1 Einzellösungen

Der eine der beiden Grenzfälle bei der Systematisierung von Lösungsstrukturen ist derjenige der Einzellösungen, bei denen das Substitutionsportefeuille aus genau einer Anleihe A_I besteht. Zu unterscheiden ist dabei, ob die Restlaufzeit von A_I

a) in das Schlußintervall $]I_T]$ oder

b) in ein davor liegendes Intervall fällt.

Bei Fälligkeit im Schlußintervall ergeben sich dann die Unterfälle eines identischen, größeren oder kleineren Kupons.

(1) Stimmen A_0 und A_I hinsichtlich Kuponhöhe und Restlaufzeit vollkommen überein, handelt es sich also um identisch ausgestattete Emissionen, so ergibt sich als Substitutionsportefeuille genau ein Stück der Anleihe A_I. Dieser Fall wird als *Triviallösung* bezeichnet.

(2) Bei einem größeren Kupon, also $C_I > C_0$, und Fälligkeit von A_I im Schlußintervall wird von A_I eine geringere Stückzahl als *Eins* erworben. Die überschießenden Kuponerträge werden über die Restlaufzeit hinweg vorgetragen, so daß durch diese Kumulierung die Zahlung im letzten Zeitpunkt exakt abgedeckt wird. Die Summe aus den Kupons plus der Rückzahlung von 100 muß also für A_0 wie für A_I übereinstimmen. Besitzt A_0 noch eine Restlaufzeit von n Jahren, so ist von A_I folgende Stückzahl zu erwerben:

$$x_1 = \frac{n \cdot C_0 + 100}{n \cdot C_1 + 100} \tag{15}$$

mit

$$x_1 \ C_1 \geq C_0 \tag{16}$$

und

$$x_1 \ (C_1 + 100) \geq (C_0 + 100). \tag{17}$$

Die Bedingungen (16) und (17) stellen sicher, daß alle Zahlungen aus A_0 mindestens abgedeckt sind. Wegen $C_1 > C_0$ und $x_1 > 1$ ergeben sich infolge der Relation (16) zwingend Mittelvorträge aus reinen Kuponterminen.

(3) Im Falle eines kleineren Kupons von A_1 ergibt sich das *Problem des ersten Kupontermins*. Da Mittelrücktrag nicht zugelassen ist, muß der erste Kupon von A_1 den ersten Kupon von A_0 vollständig abdecken. Diese Bedingung ist erfüllt für eine Stückzahl von

$$x_1 = \frac{C_0}{C_1} > 1. \tag{18}$$

Bedenkt man nochmals das Verbot des Mittelrücktrags, wird auch klar, daß bei einer Stückzahl, wie in Gleichung (18) gezeigt, ein Teil der Schlußzahlung von A_1 „ins Leere" geht und nicht mehr benötigt, wohl aber erworben wird. Dieser Teil in Höhe von

$$\left(\frac{C_0}{C_1} - 1 \right) \cdot 100 \tag{19}$$

führt dazu, daß stets $x_1 > 1$ bleibt. Eine „Einzellösung mit höherem Kupon" ist nur möglich unter der notwendigen Bedingung, daß es keine Anleihe mit niedrigerem Kupon gibt, A_0 also in ihrer Restlaufzeitklasse die Anleihe mit dem minimalen Kupon darstellt.

Bei gleicher Restlaufzeit wird ein dominantes Portefeuille als „Einzellösung mit niedrigerem Kupon" allein wegen kombinatorischer Friktionen auf Grund des verlorenen Betrages nach Ausdruck (19) nur zu einem deutlich höheren Preis als P_0 zustande kommen.

(4) Bei Berücksichtigung von Steuern muß die Gleichung (17) modifiziert werden zu

$$x_I = \frac{(I-s)\cdot n\cdot C_0 + 100}{(I-s)\cdot n\cdot C_I + 100}. \tag{20}$$

Abgeleitet nach dem Steuersatz s ändert sich die zu erwerbende Stückzahl mit

$$\frac{dx_I}{ds} = \frac{(-n\cdot C_0)\cdot(n\cdot C_I - n\cdot s\cdot C_I + 100) - (n\cdot C_0 - n\cdot s\cdot C_0 + 100)(-n\cdot C_I)}{(n\cdot C_I - n\cdot s\cdot C_I + 100)^2}. \tag{21}$$

Der vorzeichenbestimmende Zähler ergibt sich zusammengefaßt als

$$100\cdot n\cdot(C_I - C_0). \tag{22}$$

Der Zähler (22) und damit die gesamte Ableitung (21) ist für Einzellösungen mit größerem Kupon stets positiv. Der vom Steuersatz s abhängige Preis des Substitutionsportefeuilles P_{SP} wird daher wegen der steigenden zu erwerbenden Stückzahl bei konstantem Preis P_0 für die Anleihe A_0 immer *steigend* verlaufen. Dabei wächst P_{SP} um so schneller, je größer die Restlaufzeit ist und je höher die Kupondifferenz ausfällt.

(5) Bei nicht-trivialen Einzellösungen hängt die Vorteilhaftigkeit des Substitutionsportefeuilles entscheidend vom Wiederanlagezins ab, mit dem die zwingend notwendigen Mittelüberträge verzinst werden. Auch wenn hier aus oben diskutierten Gründen stets nur mit Kassenhaltung gearbeitet wird, wird für den gerade beschriebenen Fall der Einzellösung mit höherem Kupon, aber exakt kongruenten Zahlungsterminen, eine Betrachtung der entgangenen Wiederanlagezinsen vorgenommen.

In jedem Kupontermin liefert die mit der Stückzahl x_I gemäß Gleichung (17) erworbene Anleihe A_I aus dem Substitutionsportefeuille einen Überschuß über den Kupon der zu ersetzenden Anleihe A_0 in Höhe von

$$x_I\cdot(I-s)\cdot C_I - (I-s)\cdot C_0 > 0. \tag{23}$$

Werden alle Überschüsse mit einem hier zur Vereinfachung als einheitlich unterstellten, steuermodifizierten Zinssatz [(1 - s) i] aufgezinst, so ergibt sich

$$(1-s)\cdot(x_1\cdot C_1-C_0)\frac{(1+(1-s)\cdot i)^n-1}{(1-s)\cdot i}. \tag{24}$$

Da für die hier angestellte Betrachtung nur die Zinsen und Zinseszinsen relevant sind, nicht aber die verzinsten Mittelüberträge selbst, die ja in der Zahlungsreihe später wieder zur Duplikation verwendet werden, muß der Ausdruck (24) noch korrigiert werden um $(n - 1)$ Kupondifferenzbeträge. Die Schlußzahlung spielt für die Aufzinsung keine Rolle. Als (Teil-)Endwert der entgangenen Zinsen ergibt sich dann

$$(1-s)\cdot(x_1\cdot C_1-C_0)\cdot\left[\frac{(1+(1-s)\cdot i)^n-1}{(1-s)\cdot i}-(n-1)\right]. \tag{25}$$

Einsetzen von Gleichung (15) für x_1 und Zusammenfassen führt schließlich zu einem entgangenen Zinsvolumen *EZV* von

$$\frac{100\cdot(1-s)\cdot(C_1-C_0)}{n\cdot(1-s)\cdot C_1+100}\left[\frac{(1+(1-s)\cdot i)^n-1}{(1-s)\cdot i}-(n-1)\right]. \tag{26}$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß das *EZV* mit der Kupondifferenz $(C_1 - C_0)$ steigt. Als Beispiel für die Größenordnung dieses Effektes soll hier die oben gewählte Standardanleihe A_0 (8 %, 3 Jahre Restlaufzeit) durch eine ansonsten identische 10%-Anleihe bei einem Wiederanlagezins von i = 8 % p. a. ersetzt werden. Für einen Steuersatz von $s = 0$ % ergibt sich

$$EZV(0\%)=\frac{100\cdot(10-8)}{3\cdot 10+100}\cdot\left[\frac{(1+0{,}08)^3-1}{0{,}08}-(3-1)\right]=1{,}92. \tag{27}$$

Werden diese 1,92 DM auf $t = 0$ abgezinst, so zeigt sich, daß das Substitutionsportefeuille am Barwert etwa 1,52 DM einbüßt. Auf Grund dieser hohen Differenz zuungunsten des Substitutionsportefeuilles sollten Einzellösungen mit höherem Kupon zu nicht dominanten Substitutionsportefeuilles führen. Auch im Falle von s = 50 % ergibt sich noch eine Schlechterstellung des Substitutionsportefeuilles:

$$EZV(50\%)=\frac{100\cdot(1-0{,}5)\cdot(10-8)}{3\cdot 10\cdot(1-0{,}5)+100}\left[\frac{(1+0{,}04)^3-1}{0{,}04}-(3-1)\right]=0{,}98. \tag{28}$$

Wegen der steuerreduzierten Zinsbeträge und Wiederanlagesätze fällt die Differenz absolut geringer aus, führt aber immer noch zu eine Verminderung des Barwertes um 0,87 DM.

Für nicht mehr exakt übereinstimmende Kupontermine ergeben sich erheblich komplexere Berechnungen, da nun Intervallabschnitte unterschiedliche Vortragsvolumina besitzen und zudem auch die Schlußzahlung separat zu berücksichtigen ist. Auf die explizite Darstellung von entgangenen Zinserträgen in den weiteren, komplizierteren Strukturen wird deshalb verzichtet.

b) Einzellösungen können sich auch aus einer Anleihe mit einer um mindestens ein Jahr *kürzeren* Restlaufzeit gegenüber A_0 zusammensetzen. Dies könnte insbesondere der Fall sein, wenn mit A_0 die Anleihe mit der längsten Restlaufzeit gewählt wird. Für Fälligkeit von A_l vor dem Schlußintervall $]I_T]$ ergeben sich wiederum die drei Unterfälle eines identischen, höheren oder niedrigeren Kupons C_l.

(1) Bei m verbleibenden Zahlungszeitpunkten für A_l ergibt sich im Falle identischer Kupons ($C_0 = C_l$) eine zu erwerbende Stückzahl von

$$x_l = \frac{m \cdot C_0 + 100}{n \cdot C_0 + 100} > 1. \tag{29}$$

(2) Bei unterschiedlichen Kupons verändert sich die Formel (29) zu

$$x_l = \frac{m \cdot C_0 + 100}{n \cdot C_l + 100}. \tag{30}$$

Für $C_l > C_0$ gilt ebenfalls die Formel (30), wobei die Restriktion des ersten Kupons erfüllt ist. Eine Dominanzaussage ist a priori nicht zu treffen.

(3) Für $C_l < C_0$ ist wegen der Problematik des ersten Kupontermins die Mindestbedingung

$$x_l \geq \frac{C_0}{C_l} > 1 \tag{31}$$

zu beachten, um den ersten Kupon in der Zahlungsreihe voll abdecken zu können. Allerdings ist in beiden Fällen bei extrem inversen Zinsstrukturkurven eine Dominanz nicht völlig auszuschließen. Die kürzerlaufende Substitutionsanleihe könnte nämlich zu einem soviel niedrigeren Kurs notieren, daß der Preiserhöhungseffekt auf Grund der höheren Stückzahl, die zumindest im Falle identischer Kupons erforderlich wird, überkompensiert würde.

(4) Unter Berücksichtigung von Steuern ändert sich Formel (30) zu

$$x_I = \frac{(1-s)\cdot m\cdot C_0 + 100}{(1-s)\cdot n\cdot C_I + 100}. \tag{32}$$

Die Ableitung nach dem Steuersatz führt zu

$$\frac{dx_I}{ds} = \frac{(-n\cdot C_0)\cdot(m\cdot C_I - m\cdot s\cdot C_I + 100) - (n\cdot C_0 - n\cdot s\cdot C_0 + 100)\cdot(-m\cdot C_I)}{(m\cdot C_I - m\cdot s\cdot C_I + 100)^2}. \tag{33}$$

Der für das Vorzeichen entscheidende Zähler läßt sich verkürzen zu

$$100\cdot(m\cdot C_I - n\cdot C_0). \tag{34}$$

Damit gilt

$$\frac{dx_I}{ds} > 0 \quad \text{für} \quad m\cdot C_I > n\cdot C_0 \tag{35}$$

und

$$\frac{dx_I}{ds} < 0 \quad \text{für} \quad m\cdot C_I < n\cdot C_0. \tag{36}$$

In den meisten Fällen wird das Substitutionsportefeuille mit steigendem Steuersatz einen höheren Preis als P_0 zeigen. Der Fall (36) mit einem flachen oder leicht fallenden Verlauf der Preis-Steuersatz-Funktion $P_{SP}(s)$ tritt selten auf. Die infolge der Verkürzung fehlenden Kupons von A_I müssen dabei durch eine relativ große Differenz in der Kuponhöhe ausgeglichen werden.

Je geringer die Kupondifferenz (C_I - C_0) ist, je ähnlicher also die Zahlungsreihen ausfallen, desto flacher verläuft $P_{SP}(s)$. Für identische Kupons ergeben sich völlig flache Verläufe. Auch wenn für alle Steuersätze Einzellösungen auftreten, müssen diese nicht zwingend dieselbe Anleihe beinhalten.

c) Einzellösungen mit höherem Kupon erfordern Kassenhaltung, deren Umfang von Intervall zu Intervall wächst. Mit wachsendem Steuersatz s nehmen außerdem auch die Gesamtvolumina der Kassenhaltung zu. Dies ergibt sich aus der Berechnung des kumulierten Wiederanlagevolumens für Einzellösungen. Zumindest das gesamte Schlußintervall über, also für ein Jahr oder länger muß ein Betrag mindestens in Höhe der Schlußzahlung ($100 + C_0$) zinslos vorgetragen werden. Die Erstellung von Einzellösungen wird um so schwieriger und kostspieliger, je länger die Restlaufzeit und je niedriger der Kupon von A_0 ausfallen. Substitutionsportefeuilles aus Einzellösungen zeigen daher c. p. tendenziell höhere Preise als Portefeuilles mit Staffellösungen.

3.2 Staffellösungen

Bei der Darstellung von Staffellösungen wurde in fast allen bisherigen Studien implizit davon ausgegangen, daß die längste Restlaufzeit, also T_0, durch eine Anleihe A_i mit einem *kleineren* Kupon als A_0 abgedeckt werden kann.[26] Für diese Art der Konstruktion ist dies tatsächlich eine zwingende Voraussetzung. Staffellösungen *ohne Mittelübertragung* sind also nur unter den beiden folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen möglich:

1. In jedem Intervall wird mindestens eine Anleihe fällig.

2. Im Schlußintervall wird eine Anleihe mit kleinerem Kupon fällig.

Hier wird wieder unterstellt, daß eine Lösung über alle Steuersätze hinweg in ihrer Zusammenstellung unverändert bleibt. Nimmt man nochmals das im 2. Abschnitt verwendete Beispiel und unterstellt einen Steuersatz von s = 50 % auf Zinseinnahmen, so erhält man statt der Tabelle 1 folgende Tabelle 3 für die Netto-Zahlungsreihen:

Tabelle 3: Anleihebestand des Standardbeispiels bei einem Steuersatz von s = 50 %

Anleihe	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3 = T_0$
A_0	-100,00	+4,00	+4,00	+104,00
A_1	-94,85	+3,00	+3,00	+103,00
A_2	-96,43	+3,00	+103,00	
A_3	-98,15	+103,00		

Ermittelt man nach dem oben diskutierten rekursiven Verfahren nun die optimale Lösung unter *Beibehaltung* der Zusammensetzung des Substitutionsportefeuille, so ergibt sich

26 Ausnahme: Hinweis bei SCHAEFER (1982a), S. 135.

Tabelle 4: Beispiel einer Staffellösung bei einem Steuersatz von s = 50 %

Anleihe	x_i	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3 = T_0$
A_1	1,0097	-95,7700	+3,0291	+3,0291	+104,0000
A_2	0,0094	-0,9064	+0,0283	+0,9709	
A_3	0,0092	-0,9030	+0,9426		
Summe		-97,5794	+4,0000	+4,0000	+104,0000

Im allgemeinen Fall einer Staffellösung unter Berücksichtigung von Steuern müssen zur Duplikation von A_0 mit Restlaufzeit bis T_0, also mit noch n Zahlungsterminen, entsprechend n Anleihen mit folgenden Zahlungsreihen als Substitutionspotential zur Verfügung stehen.[27]

Tabelle 5: Zahlungsreihen von Anleihen im allgemeinen Fall

Anleihe	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	...	$t = T_0 - 1$	$t = T_0$
A_0	$-K_0$	$(1-s)C_0$	$(1-s)C_0$	...	$(1-s)C_0$	$100+(1-s)C_0$
A_1	$-K_1$	$(1-s)C_1$	$(1-s)C_1$	...	$(1-s)C_1$	$100+(1-s)C_1$
A_2	$-K_2$	$(1-s)C_2$	$(1-s)C_2$	...	$100+(1-s)C_2$	
...	...	...	...	...	...	...
A_n	$-K_n$	$100+(1-s)C_n$				

Für den allgemeinen Fall einer Staffellösung können nun wiederum die Anteile der einzelnen Anleihen am Substitutionsportefeuille ermittelt werden. Dieses rekursive Verfahren wird im folgenden verallgemeinert.

a) Wichtig für die Überlegungen in diesem Beitrag ist die Veränderung des Preises eines Substitutionsportefeuilles mit wachsendem Steuersatz. Es kann gezeigt werden, daß bei identischer Zusammensetzung des Substitutionsportefeuilles die zu erwerbende Stückzahl jeder darin enthaltenen Anleihe sinkt. Damit muß auch (wegen konstanter Preise pro Stück) der Preis des Substitutionsportefeuilles insgesamt fallen. *Durchgehende Staffellösungen ziehen also zwingend fallende Verläufe für $P_{SP}(s)$ nach sich.*

(1) Die längste Restlaufzeit wird durch A_1 abgedeckt. Dazu müssen von A_1

$$x_1 = \frac{100 + (1 - s) \cdot C_0}{100 + (1 - s) \cdot C_1} \tag{37}$$

27 Zur Vereinfachung wird hier von einem Kupontermin als Stichtag ausgegangen, um die Stückzinsproblematik zu vermeiden.

Stücke erworben werden. Wegen $C_0 > C_1$ ergibt sich mit steigendem Steuersatz s eine fallende Stückzahl x_1. Es gilt [28]

$$\frac{dx_1}{ds} < 0. \tag{38}$$

(2) Für den nächstkürzeren Zahlungstermin im Intervall $]T_0 - 2, T_0 - 1]$ ist die zu erwerbende Stückzahl von x_2 dadurch zu ermitteln, daß nur noch die von A_1 nicht abgedeckte Differenz zur Zahlung aus A_0 kompensiert wird:

$$x_2 = \frac{(1-s)\cdot C_0 - (1-s)\cdot x_1\ C_1}{100 + (1-s)\cdot C_2} \tag{39}$$

Auch für dieses Element im Substitutionsportefeuille läßt sich eine fallende Stückzahl für einen steigenden Steuersatz zeigen:[29]

$$\frac{dx_2}{ds} < 0 \tag{40}$$

(3) Allgemein wird also die Zahlungsreihe von A_0 rückwärtsgehend aufgefüllt, wobei die Schlußzahlung aus einer Substitutionsanleihe stets die verbleibende Differenz abdeckt, die nach Berücksichtigung der Kuponzahlungen aus längerlaufenden Substitutionsanleihen noch übrig bleibt. Die Stückzahl für eine Anleihe A_k im Substitutionsportefeuille ergibt sich damit in Abhängigkeit von den Kuponzahlungen derjenigen Substitutionsanleihen A_1,... ,A_{k-1}, die in späteren Intervallen als A_k fällig werden:

$$x_k = \frac{(1-s)\cdot C_0 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\ (1-s)\cdot C_i}{100 + (1-s)\cdot C_k}. \tag{41}$$

Formel (41) gilt jedoch nur für $i = 2, ..., k$ und damit nicht für die Anleihe, die im Schlußintervall fällig ist und oben als A_1 bereits diskutiert wurde. Analog zu x_2 läßt sich auch für den allgemeinen Fall x_k die fallende Stückzahl bei steigendem Steuersatz demonstrieren:[30]

28 Der Beweis befindet sich im Anhang.

29 Dieser Beweis wird ebenfalls im Anhang gezeigt.

30 Siehe auch für diesen Beweis den Anhang.

$$\frac{dx_k}{ds} < 0 \tag{42}$$

Man beachte, daß für die Fälle i = 2, ..., k der Kupon nicht kleiner als C_0 sein muß. Die Vorschrift (41) beschränkt sich nur auf C_1, gilt jedoch nicht zwingend für die übrigen Substitutionsanleihen. Die Überlegungen gelten allerdings nicht in allen Fällen auch für die kürzeste Restlaufzeit, da wegen der Stückzinsproblematik hier das sequentielle Ermittlungsschema durchbrochen werden kann.

Um auch die Schlußzahlung in einer einzigen Formel zu erfassen, müßte Formel (41) erweitert werden zu

$$x_k = \frac{100[\max(2,k) - k] + (1-s)\cdot C_0 - (1-s)\sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot C_i}{100 + (1-s)\cdot C_k} \tag{43}$$

Aus Gründen der Vereinfachung wurden jedoch für obige Ableitungen die ausgekoppelten Teile für den jeweiligen Fall verwendet.

b) Erheblich komplizierter wird die Ermittlung von Stückzahlen für nicht exakt übereinstimmende Zahlungstermine. Falls nicht mehr Terminkongruenz, sondern nur noch Intervallkongruenz herrscht, müssen Zahlungen aus den Substitutionsanleihen noch innerhalb des betreffenden Intervalls vorgetragen werden. Bei vollständigen Staffellösungen ist ein Übertrag in folgende Intervalle nicht notwendig. Insbesondere die Höhe der ersten Zahlung aus einer Anleihe erfordert aufwendige Berechnungen. Bei streng positiven Steuersätzen wird diese erste Zahlung für jeder Anleihe wegen des steuerfreien Anteils an geleisteten Stückzinsen größer als nachfolgende steuerbereinigte Kupons für ganze Jahre ausfallen.

Wenn das Substitutionspotential Staffellösungen zuläßt, treten zwingend fallende Verläufe der Preis-Steuersatz-Funktion auf. Staffellösungen sind, unter Berücksichtigung möglicher Lücken, nahezu immer bei über pari notierenden Anleihen herstellbar. In aller Regel wird sich eine Anleihe gleicher oder leicht kürzerer Restlaufzeit finden, die unter oder nahe bei pari notiert und damit wegen des niedrigeren Kurses auch einen vergleichsweise niedrigeren Kupon tragen muß. Damit ist bereits das Schlußintervall abgedeckt und der Preis des Substitutionsportefeuilles weitgehend determiniert. Diese Aussage gilt für alle Steuersätze. Wegen Gleichung (42) muß der Preis des Substitutionsportefeuilles P_{SP} mit zunehmendem s fallen.

c) Die ökonomische Begründung für die wachsende Vorteilhaftigkeit der Staffellösungen im Nach-Steuer-Fall liegt in der Steuerfreiheit von Kursgewinnen und Kapitalrückzahlungen. Das *Steuerausweichpotential* wird für diese Struktur maximal, da im Verhältnis zum Zahlungsstrom der ausgewählten Anleihe auch die Kupontermine in wachsendem Maße durch steuerfreie Anteile an den Kapitalrückzahlungen abgedeckt werden.

3.3 Sonstige Lösungsstrukturen

Von den Einzellösungen und echten Doppellösungen abgesehen lassen sich alle weiteren denkbaren Lösungsstrukturen als Varianten einer Staffellösung interpretieren. Doppellösungen wurden bereits im 2. Abschnitt behandelt. Beide Anleihen sind dabei im Schlußintervall fällig und können deshalb *nicht* gleichermaßen größere beziehungsweise kleinere Kupons als C_0 tragen. Mit steigendem Steuersatz gelten die Formeln (5) und (6) für die zu erwerbenden Stückzahlen fort, denn ein Reduktionsfaktor (1 - s) für die Steuer ist für die Ermittlung der Stückzahlen irrelevant.

Die Idealform einer Staffellösung ohne Mittelübertragung ist theoretisch nur erreichbar, wenn in jedem Intervall auch mindestens eine Anleihe aus dem Substitutionspotential fällig wird. Ansonsten entstehen „Lücken" in der Restlaufzeitstaffel, die - mangels Rücktragsmöglichkeit - durch höhere Stückzahlen von Anleihen mit davor liegenden Zahlungsterminen abgedeckt werden müssen.

Zur Systematisierung der zahlreichen Unterfälle wird die vollständige Restlaufzeitstaffel als Idealfall angesehen. Von dieser Situation ausgehend können verschiedene „Defekte" in der Struktur auftreten:

a) Es kann eine mittlere Restlaufzeit fehlen, womit der Fall einer (mittigen) *Lücke* entsteht.

b) *Verkürzung* bedeutet das Fehlen der längsten Restlaufzeit.

c) Mit *Verspätung* wird die Nichtbesetzung des Anfangsintervalls bezeichnet.

d) Ein Intervall kann *doppelt* besetzt sein.

e) Es existieren *Kombinationen* dieser Grunddefekte.

Für die nachfolgende Diskussion wird jeweils eine ansonsten wieder komplettierte Staffelstruktur unterstellt.

a) Der elementare Unterfall ist eine Staffellösung mit einer *mittigen Lücke*. Wegen des Rücktragsverbots muß die Zahlungsdifferenz durch eine in einem früheren Intervall fällige Anleihe mit erbracht werden. Gegenüber der vollständigen Staffellösung ändert sich in Formel (41) nur die Indizierung. Die Lücke an der Stelle k wird nicht besetzt, statt dessen deckt die davor fällige Anleihe A_{n-k+1} die Zahlung mit ab:

$$x_{n-k+1} = \frac{(1-s)\cdot C_0 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i \cdot (1-s)\cdot C_i}{100 + (1-s)\cdot C_{n-k+1}}. \tag{44}$$

Bei unveränderter Struktur fällt die zu erwerbende Stückzahl weiterhin mit steigendem Steuersatz:

$$\frac{dx_{k+1}}{ds} < 0. \tag{45}$$

Auch hier ist die Ableitung durch Änderung der Indizierung in Formel (41) evident. Das Auftreten einzelner Lücken ändert also noch nichts an der grundsätzlich fallenden Tendenz von P_{SP}. Dies gilt in abnehmendem Maße auch für Lücken, die sich über mehrere verbundene oder getrennte Intervalle erstrecken.

Wird eine Anleihe im Schluß-, genau eine andere in einem davor liegenden Intervall fällig, so beruht diese *gespreizte* Lösung auf einer Einzellösung, die ergänzt wurde um eine kürzerlaufende Anleihe, da ansonsten das Problem des ersten Kupontermins nicht gelöst worden wäre. Die kürzerlaufende Anleihe wird entsprechend einen Kupontermin zwischen Erwerbstag und erstem Kupon von A_0 aufweisen. Eine solche Konstellation wird zumeist im Vergleich zum Preis von A_0 einen höheren Preis des Substitutionsportefeuilles zeigen. Wegen der unbestimmten Charakteristika der kürzerlaufenden Anleihe ist eine Aussage über das Verhalten dieses Preises bei Variation des Steuersatzes nicht möglich.

b) Der zweite Unterfall einer Lücke, diesmal *im Schlußintervall*, ist oben bei den Einzellösungen schon angeschnitten worden. Dabei bleibt das Schlußintervall unbesetzt, und man erhält eine *verkürzte* Staffel. Die Änderung gegenüber der vollständigen Staffellösung betrifft nur die Anleihe mit der längsten Restlaufzeit im Substitutionsportefeuille, hier weiterhin als A_1 bezeichnet. Die davor liegenden Anleihen leisten keinen Beitrag, da A_1 sonst selbst verdrängt worden wäre. A_1 muß daher auch alle Intervalle vom eigenen Fälligkeitstermin bis $]I_T]$ auffüllen. A_1 besitzt also nur m verbleibende Zahlungstermine gegenüber den n Terminen von A_0. Damit erhöht sich die Stückzahl auf

$$x_1 = \frac{100 + (n - m) \cdot C_0}{100 + C_1}. \tag{46}$$

Für das rekursive Auffüllen gilt Gleichung (41) weiter. Analog zur Entstehung verkürzter Strukturen in Substitutionsportefeuilles bei Einzellösungen ist nun jedoch nicht mehr zu entscheiden, mit welcher Neigung $P_{SP}(s)$ verläuft.

c) Der dritte Unterfall entsteht durch Fehlen der Substitutionsanleihe mit der *kürzesten* Restlaufzeit. Je nach Lage von Erwerbszeitpunkt und den ersten Kuponterminen der beteiligten Anleihen im Substitutionsportefeuille kann die Zahlung im zumeist verkürzten Anfangsintervall bereits durch nachfolgende Anleihen abgedeckt sein. Folgendes vom Standardfall abweichende Beispiel soll dies verdeutlichen:

Tabelle 6: Beispiel für das Zustandekommen verzögerter Staffellösungen

Anleihe	$t = 0$	$t = 0{,}25$	$t = 0{,}75$	$t = 1{,}25$	$t = 1{,}75$	$t = 2{,}25$	$t = 2{,}75$
A_0	$-K_0$-2,00		+5,00		+4,00		+104,00
A_1	$-K_1$-4,50	+5,25		+3,00		+103,00	

Die Anleihe A_0 ist mit einem 8%-Kupon ausgestattet und besitzt eine Restlaufzeit von 2,75 Jahren. Folglich sind im Erwerbszeitpunkt $t = 0$ dann 2 DM Stückzinsen zu leisten, die im ersten Kupontermin ($t = 0{,}75$) nicht zu versteuern sind. Netto verbleiben zu diesem Zeitpunkt damit diese 2 DM plus (nach Steuern) die Hälfte des zeitanteiligen Kupons, also 3 von 6 DM, insgesamt damit 5 DM. Der Rest der Zahlungsreihe stellt sich dann wie bekannt dar. Bei der Substitutionsanleihe A_1 mit einem Kupon von $C_1 = 6$ % sind bei 2,25 Jahren Restlaufzeit 4,50 DM an Stückzinsen zu leisten. Im ersten Kupontermin ($t = 0{,}25$) werden zusätzlich zu diesen 4,50 DM die Hälfte der restlichen 1,50 DM vereinnahmt, so daß sich die Netto-Zahlung auf 5,25 DM beläuft, womit die erste Zahlung von A_0 mehr als abgedeckt wäre, zumal von A_1 eine Stückzahl $x_1 > 1$ zu erwerben ist.

Für die Bildung von Substitutionsportefeuilles ist diese Überlegung insofern von Belang, als nun keine vollständige Staffellösung mehr entstehen wird. Soweit A_1 Bestandteil des Substitutionsportefeuilles ist, wird das Anfangsintervall]0; 0,75] nicht durch eine Substitutionsanleihe besetzt werden, da sich hier bereits ein Überschuß im Substitutionsportefeuille ergibt. Ob weitere Lücken folgen oder die ganze

Struktur sogar zu einer allein aus A_l bestehenden Einzellösung schrumpft, ist nicht vorherzusagen. Dies hängt von den Anleihekursen im Substitutionspotential ab.

d) Gelegentlich kommt es zur *doppelten Besetzung* eines späteren Intervalls, wobei dann mindestens ein früheres Intervall leer bleibt. Diese Verschiebung ist wiederum mit der Problematik des ersten Kupontermins zu erklären. Die Abdekkung dieses ersten Kupons von A_0 käme teurer, falls die längste Restlaufzeit durch eine einzige Substitutionsanleihe besetzt würde und am Anfang eine ganz kurz laufende Anleihe hinzutreten müßte. Statt dessen werden in einem Intervall zwei Anleihen fällig, von denen die eine im wesentlichen die nachfolgende Zahlung abdeckt, während die andere, vergleichsweise teure, Anleihe wegen ihres Kupontermins für das Anfangsintervall benötigt wird.

e) Das Zusammentreffen von *zwei Defekten* in demselben Portefeuille ist auf das gleichzeitige Vorhandensein der in den vorangegangenen Abschnitten erklärten Unvollständigkeit im Substitutionspotential zurückzuführen. Insofern entstehen kombinierte Defekte voneinander unabhängig. Die Verkürzung bei den längsten Restlaufzeiten basiert auf fehlenden Anleihen für diese Intervalle. Zusätzlich auftretende Lücken in mittleren Intervallen gehen ebenfalls auf fehlende Substitutionsanleihen zurück, während für *verspätete* Restlaufzeiten die Problematik des ersten Kupontermins verantwortlich bleibt. Hinsichtlich Dominanz und Verhalten bei Variation des Steuersatzes sind keine eindeutigen Aussagen für solche „fragmentarischen" Strukturen möglich. Hier fehlt es deshalb an einer scharfen Abschätzungsmöglichkeit, weil in allen Lösungen, in denen Verkürzungen eine Rolle spielen, die entgangenen Wiederanlagezinsen überkompensiert werden könnten durch einen sehr niedrigen Einstandskurs für die kürzerlaufende(n) Anleihe(n). Mithin hängt das Ausmaß der Beeinflussung des Preises vom Grad der Inversion der Zinsstrukturkurve ab.

3.4 Sonderfälle

In allen bisher dargestellten Fällen enthielt das Substitutionsportefeuille ausschließlich Anleihen, deren Restlaufzeiten nicht größer waren als die Restlaufzeit von A_0. Eine solche Konstellation mit längerer Restlaufzeit würde wegen des Rücktragsverbotes dazu führen, daß mindestens die Schlußzahlung über $t = T_0$ hinaus „überhängt" und nicht zur Duplikation der Zahlungsreihe von A_0 verwendet werden kann, gleichwohl aber zum Preis des Substitutionsportefeuilles beiträgt. In Abhängigkeit vom Datenbestand entstehen Überhanglösungen zwingend in den folgenden beiden Fällen:

1. Die Anleihe mit der kürzesten Restlaufzeit soll substituiert werden. Die Lösung muß dann eine Anleihe A_I enthalten, die *später* als A_0 fällig wird.

2. Zur Duplikation des *ersten Kupons* von A_0 stehen nur Anleihen zur Verfügung, die längere Restlaufzeiten als A_0 aufweisen. A_0 braucht dabei nicht die kürzeste Restlaufzeit im Substitutionspotential besitzen. Das - vermutlich relativ kurze - Anfangsintervall läßt sich also nur durch Kuponzahlungen aus solchen Anleihen füllen, deren Schlußzahlungen erst nach dem Schlußintervall erfolgen.

Wegen des Rücktragsverbots geht in beiden Varianten dann mindestens die Schlußzahlung von A_I „ins Leere", und damit ist -unter Berücksichtigung der „Problematik des ersten Kupontermins" - A_0 allein aus den Kupons von A_I zu duplizieren:

$$(1-s)\cdot C_0 + 100 \overset{!}{=} (1-s)\cdot x_I \cdot C_I. \tag{47}$$

Aufgelöst nach x_I ergibt sich als zu erwerbende Stückzahl

$$x_I = \frac{100 + (1-s)\cdot C_0}{(1-s)\cdot C_I}. \tag{48}$$

Die Stückzahl von x_I wird deutlich über dem Wert von Eins liegen. Wegen der Problematik des ersten Kupontermins wird auch $C_I > C_0$ gelten. Solche Überhanglösungen zeigen vermutlich einen deutlich höheren Preis als P_0. Dies ist allerdings nicht zwingend. Bei extrem steilen Zinsstrukturkurven ist es denkbar, daß das Substitutionsportefeuille trotzdem einen niedrigeren Preis annimmt. Überhanglösungen stellen im Grunde einen Grenzfall zu den Einzellösungen mit größerem Kupon dar. Die Beachtung der Problematik des ersten Kupontermins führt hierbei zu einer Deformierung des Standardfalles. Mangels empirischer Relevanz[31] wird hier auf eine explizite Darstellung der Ableitung von Stückzahl (48) nach s verzichtet. Es läßt sich jedoch zeigen, daß P_{SP} auch bei Überhanglösungen mit wachsendem Steuersatz zunimmt.

Unabhängig davon, ob und wie sich ein Substitutionsportefeuille bilden läßt, existieren Fälle, in denen die Unvorteilhaftigkeit des Erwerbs einer Anleihe für eine bestimmte Klientel unmittelbar gezeigt werden kann. Eine Investition wird sicher dann nicht getätigt werden, wenn der Kapitaleinsatz höher ist als die (ungewichtete) Summe der zukünftigen Rückflüsse. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens solcher

31 Siehe unten in Tabelle 2.

Konstellationen steigt mit wachsenden Steuersätzen für Anleihen mit kurzen Restlaufzeiten. Bei stark steigenden Zinsstrukturkurven existieren am kurzen Ende Anleihen mit geringer Restlaufzeit und deutlichem Agio. Hohe Steuersätze reduzieren dabei die zu erwartenden Rückflüsse, deren steuerpflichtiger Anteil um so höher ist, je höher bei gleicher Restlaufzeit der Kupon ausfällt. Die gezahlten Stückzinsen sind für diese Überlegung irrelevant, da sie in betragsmäßig identischer Höhe im ersten Kupontermin zurückfließen. Ein Anleger mit dem individuellen Steuersatz s wird eine über pari zum Kurs von K_0 notierende Anleihe A_0 folglich nicht halten, wenn gilt:

$$(K_0 - 100) \geq (1 - s) \cdot n \cdot C_0. \tag{49}$$

Für einen Steuersatz von s = 100 % wird klar, daß steuerbelastete Anleger überhaupt keine Anleihen über pari mehr halten würden. Solche Anleihen können jedoch weiterhin sinnvollerweise von steuerbefreiten Anlegern erworben werden. Der kritische Steuersatz, von dessen Erreichen an eine Anleihe nicht mehr gehalten wird, ergibt sich durch Umformen von Bedingung (49) zu

$$s = 1 - \frac{(K_0 - 100)}{n \cdot C_0}. \tag{50}$$

So würde beispielsweise eine Anleihe mit einem Kupon von C = 8 % und einer Restlaufzeit von zwei Jahren bei einem Kurs von K = 107,00 auf keinen Fall mehr von Anlegern mit einem Steuersatz von $s \geq 60$ % gehalten. Betrachtet man diesen Sonderfall ergänzend zur Staffellösung, wird klar, daß tatsächlich für Anleger mit sehr hohen Steuersätzen und Anleihen deutlich über pari ein vermutlich preisgünstigeres Substitutionsportefeuille teilweise gar nicht mehr ermittelt zu werden braucht, da die Vorteilhaftigkeit des Erwerbs nach Bedingung (50) bereits ausgeschlossen werden kann.

3.5 Vermutungen über das Auftreten bestimmter Lösungsstrukturen in Substitutionsportefeuilles

Für die meisten Lösungsstrukturen von Substitutionsportefeuilles ließ sich keine analytische Herleitung finden. Hinsichtlich der relevanten Größen, nämlich Anzahl, Restlaufzeit und Kuponhöhe der Substitutionsanleihen, bleibt man daher in einigen Punkten zunächst auf Vermutungen angewiesen. Diese sollen empirisch im 5. Abschnitt untersucht werden.

a) Im Hinblick auf die Anzahl der Anleihen in einem Substitutionsportefeuille wurde schon bei der Diskussion der Doppellösungen darauf eingegangen, daß sich bei drei Anleihen mit gleicher Restlaufzeit, aber unterschiedlichen Kupons eine davon stets als Linearkombination aus den beiden anderen darstellen läßt. Sind die Restlaufzeiten nicht tagesgenau gleich, können Abweichungen in der Stückzahl wegen der unterschiedlichen Berechnungsbasis der Stückzinsen entstehen. Auch dann befinden sich *nie mehr als zwei Anleihen in demselben Intervall* $]I_t]$.

Theoretisch müßte die maximale Anzahl z der im Substitutionsportefeuille vorhandenen Anleihen damit $(2n)$ betragen. Angesichts der Staffellösung als einer Art von Idealform ist jedoch zu vermuten, daß die Anzahl der im Substitutionsportefeuille vorhandenen Anleihen z nicht größer wird als die Zahl der über die Restlaufzeit von A_0 verbliebenen Zahlungszeitpunkte, also $z \leq n$. Hier ist eine analytische Beweisführung wegen der Verwendung von monatlichen Kassenhaltungsvariablen bei jährlichen Zahlungsterminen nicht möglich.

b) Theoretisch denkbar sind Lösungen aus Substitutionsanleihen mit längerer *Restlaufzeit* als A_0, die hier als Überhanglösungen bezeichnet wurden. Da in diesem Falle der „überhängende" Teil der Zahlungsreihe dieser Substitutionsanleihe wegen des Rücktragsverbotes für die Duplikation verloren ist, werden solche Lösungen vermutlich sehr selten auftreten und dann zu teureren Substitutionsportefeuilles führen, so daß $D > 0$ gelten sollte.

c) Mit Blick auf die Preisrelation (13) wurde gezeigt, daß Einzellösungen mit niedrigerem Kupon stets zu teureren Substitutionsportefeuilles führen. Einzellösungen mit höherem Kupon benötigen umfangreiche Kassenhaltung. Insgesamt sollten Einzellösungen *im Durchschnitt* zu Substitutionsportefeuilles mit relativ höheren Preisen führen. Dies läßt sich formulieren in der Hypothese

(H.1) $\overline{D}(z=1) > \overline{D}(z>1)$.

Bei den idealtypischen Staffellösungen, die mit steigendem Steuersatz nie abnehmende Preise für das Substitutionsportefeuille zeigen, ist dagegen mit einer größeren Zahl von dominanten Substitutionsportefeuilles zu rechnen. Analog zu Hypothese (H.1) lautet dann Hypothese

(H.2) $\overline{D}(z=n) > \overline{D}(z<n)$.

Falls sich diese beiden Vermutungen bestätigen sollten, wäre damit der Einfluß des methodischen Kuponeffektes erkennbar.

4. Empirische Analyse von Lösungsstrukturen in Substitutionsportefeuilles

4.1 Ermittlung von Substitutionsportefeuilles aus realen Daten

Die Ermittlung von optimalen Substitutionsportefeuilles erfolgt für empirische Zwecke sinnvollerweise nicht durch Anwendung der oben abgeleiteten rekursiven Formeln, die sämtlich die Stückzinsproblematik zur Vereinfachung noch gar nicht berücksichtigen. Vielmehr wird auf Basis der linearen Programmierung folgendes Modell verwendet:[32]

Am Anleihemarkt werden an einem bestimmten Stichtag $N+1$ Anleihen $A_0, A_1, \ldots$, A_N notiert. A_0 erhält bezüglich der übrigen Anleihen eine ausgezeichnete Stellung zugewiesen. Ziel ist die Minimierung des Kapitaleinsatzes bei Erhalt einer vorgegebenen Zahlungsreihe nach Steuern:

$$\min. \quad P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n \tag{51}$$

u. d. N.

$$a_{t1} \cdot x_1 + a_{t2} \cdot x_2 + \ldots + a_{tn} \cdot x_n + k_{t-1} - k_t \geq a_{t0} \quad , \quad t = [1; T_0] \tag{52}$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{53}$$

$$k_t \geq 0 \quad , \quad t = [1; (T_0 - 1)]. \tag{54}$$

Die Koeffizienten P_i der Zielfunktion sind am Markt beobachtete Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ (Stichtag) für alle Anleihen i. Diese Preise setzen sich zusammen aus den amtlichen Kassakursen der Anleihen zuzüglich der zu zahlenden Stückzinsen und Spesen. Die am deutschen Rentenmarkt erhobenen Spesen für Privatanleger orientieren sich an erworbenen Nominalwerten, und diese sind für ein Substitutionsportefeuille im Vergleich zur ersetzten Anleihe A_0 in der Regel nicht identisch. Der Einfluß auf die Bildung von Portefeuilles erwies sich allerdings als vernachlässigbar gering.

Die Variablen x_i stellen wie bisher die zu erwerbenden Stückzahlen für die Anleihen A_i dar. Alle Zahlungen beziehen sich auf den nominalen Wert von 100 DM je Stück. Die Stückzahl der ausgewählten Anleihe wird für die rechte Seite des Linearen Programms auf Eins normiert. Betrachtet man die Zielfunktion und die Nebenbedin-

---

32 Vgl. BÜHLER/RASCH (1994), S. 11.

gungen ohne Nichtnegativitätsbedingungen, so ergeben sich als Spaltenvektoren die jeweiligen Zahlungsreihen für alle Papiere A_i mit $i = 0 ,... ,N$. Es werden nur positive Stückzahlen zugelassen und damit Leerverkäufe ausgeschlossen.

Die Koeffizienten a_{ti} in der Matrix stellen steuerbereinigte Zahlungen aus der Anleihe A_i zum Zeitpunkt t dar. Mittelvortrag ist über die Variablen k möglich, Kreditaufnahmen bleiben aber durch Bedingung (54) ausgeschlossen. Diese Festlegungen entsprechen Annahme 3. Auf der rechten Seite des linearen Programms stehen die Zahlungen aus der Referenzanleihe A_0, die selbst nicht Bestandteil der Lösung werden kann.[33]

Unter Anwendung dieses linearen Programms wurden aus dem Bestand des DM-Inlands- und des DM-Euromarktes[34] insgesamt 1620 Substitutionsportefeuilles nach einem repräsentativen Auswahlschema[35] gebildet und auf ihre Zusammensetzung hin analysiert.

4.2 Untersuchungsdesign

Die Vorgehensweise besteht im großen gesehen aus zwei Schritten: Zunächst werden aus der betrachteten Auswahl von 1620 Portefeuilles für jede der im vorhergehenden Abschnitt formulierten Vermutungen die relevante Anzahl von Fällen ermittelt. Der Teil 5.1 liefert dazu aggregierte Ergebnisse. Systematik und Bezeichnungsweise folgen den Vorgaben des 3. Abschnitts. Für jedes einzelne Portefeuille wird die Struktur der darin enthaltenen Anleihen in bezug auf Anzahl, Restlaufzeiten, Kuponhöhe und Kupontermine ausgewertet.

Im Teil 5.2 werden mehrere Substitutionsportefeuilles herausgegriffen, an denen exemplarisch die Lösungsstruktur gezeigt werden kann. Diese Fälle repräsentieren zugleich die aufgetretenen Verläufe der Preis-Steuersatz-Funktion. Im einzelnen werden die Stückzahlen jeder im Substitutionsportefeuille enthaltenen Anleihe sowie die relevanten Stammdaten, wie Kupon und Restlaufzeit, aufgelistet und im Hinblick auf die daraus resultierende Struktur analysiert.

---

33 Zu den Einzelheiten der Spezifikation dieses Ansatzes siehe BÜHLER/RASCH (1994), S. 11 f. und S. 15 ff.

34 Die Beschreibung der Daten befindet sich bei BÜHLER/RASCH (1994) auf den Seiten 17-19.

35 Zur Darstellung dieser Auswahl siehe BÜHLER/RASCH (1994), S. 19 f.

5. Empirische Ergebnisse zur Analyse von Substitutionsportefeuilles

5.1 Ergebnisse zum Einfluß des „methodischen Kuponeffektes“

In sämtlichen 1620 Substitutionsportefeuilles wurde erwartungsgemäß in keinem einzigen Fall eine Anzahl $z > n$ ermittelt. Es kann also festgehalten werden, daß die *Anzahl z der* in einem optimalen Substitutionsportefeuille enthaltenen *Anleihen auf maximal die Anzahl der Zahlungstermine* in der Restlaufzeit der Referenzanleihe A_0 *beschränkt* ist. Außerdem werden *nie mehr als zwei Substitutionsanleihen in demselben Intervall* fällig. Es existiert auch kein Fall, in dem in mehr als einem Intervall zwei Substitutionsanleihen fällig werden.

Für den entscheidenden Zusammenhang mit der Preisdifferenz D nach Definition (13) ergibt sich folgendes Bild:

Tabelle 7: Häufigkeit von Substitutionsportefeuilles bestehend aus einer Anzahl von z Anleihen und durchschnittliche Höhe von D

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	567	243	88	113	163	100	95	99	116	36
D	+2,26	+6,89	-1,16	-0,01	-2,51	-2,49	-2,90	-3,34	-3,20	-2,22

Der hohe Anteil an Einzellösungen deutet schon das Problem an, Anleihen mit eher niedrigen Kupons zu substituieren. Die Existenz einer etwa ebenso großen Anzahl an vollständigen Staffellösungen ist nicht direkt ersichtlich, verbirgt sich aber in dem etwa auf gleicher Höhe bleibenden Anteil bei $z = 4$ bis $z = 9$.

Tabelle 8: Häufigkeit der verschiedenen Strukturvarianten

Strukturgruppe	Anzahl	Anteil (%)
Triviallösung	24	1,5
Einzellösung	496	30,6
Vollständige Staffellösung	452	27,9
Mittig lückenhafte Staffellösung	95	5,9
Verkürzte Staffellösung	88	5,4
Verspätete Staffellösung	116	7,2
Kombinierte Defekte (Verkürzung/Verspätung)	23	1,4
Doppellösung mit identischer Restlaufzeit	97	6,0
Zweierlösung mit gespreizter Restlaufzeit	61	3,8
Doppelbesetzung eines Intervalls ($z > 2$)	110	6,8
Fragmentarische Lösung ($z > 2$)	52	3,2
Überhanglösung	6	0,4

Mit Blick auf den methodischen Kuponeffekt liegt der entscheidende Punkt für die empirische Relevanz unterschiedlicher Lösungsstrukturen in der Häufigkeit des Auftretens. Tabelle 8 gibt die gefundenen Resultate in der Systematik des 3. Abschnitts wieder.

Man erkennt das herausragende Gewicht der beiden Grenzfälle der Einzellösung und Staffellösung. Die in anderen Studien häufig betrachtete Doppellösung spielt nur eine untergeordnete Rolle. Lösungsstrukturen mit Defekten treten um so seltener auf, je komplexer die Variante erscheint. Zusammengefaßt und aufgeschlüsselt nach den unterschiedlichen Substitutionspotentialen ergibt sich dazu das folgende Bild.

Tabelle 9: Anzahl der auftretenden Strukturen nach Marktsegmenten

Struktur	Gesamtmarkt	DM-Inlandsmarkt	DM-Euromarkt	∅
Einzellösung	175	217	175	567
Staffellösung	204	160	87	451
Sonstige	161	163	278	602
Gesamtheit	540	540	540	1620

Die geringere Zahl der Einzellösungen im DM-Euromarkt gegenüber dem DM-Inlandsmarkt läßt sich damit erklären, daß sich im DM-Euromarkt praktisch der gesamte Bestand an Niedrigkuponanleihen (mit einem Kupon unter 5 %) befand, so daß häufiger noch eine Anleihe mit einem kleineren Kupon als A_0 für das Substitutionsportefeuille gefunden werden konnte. Die Notwendigkeit einer Einzellösung entfiel dadurch vielfach. *Vollständige* Staffellösungen konnten dagegen im DM-Euromarkt nur selten gebildet werden, da der Bestand an umlaufenden Anleihen dafür häufig zu schmal war. Entsprechend steigt die Möglichkeit der Ausbildung vollständiger Staffellösungen mit der Vergrößerung des Substitutionspotentials. Der Einfluß eines kleineren Substitutionspotentials zeigt sich auch deutlich im Anstieg des Preises des Substitutionsportefeuilles P_{SP} relativ zum Marktpreis P_0, also im Anstieg der Differenz D, wie folgende Tabelle demonstriert:

Tabelle 10: Abhängigkeit von D von der Größe des Substitutionspotentials

Struktur	Gesamtmarkt	DM-Inlandsmarkt	DM-Euromarkt	∅
Einzellösung	+1,31	+2,26	+3,22	+2,26
Staffellösung	-3,43	-2,78	-1,66	-2,86
Sonstige	-0,16	+1,91	+3,09	+1,90
Gesamtheit	-0,92	+0,66	+2,37	+0,70

Man erkennt deutlich, daß für Einzellösungen das Substitutionsportefeuille im Durchschnitt teurer ausfällt, während für Staffellösungen das Gegenteil zutrifft. Bezogen auf den Durchschnitt aller ermittelten Portefeuilles ergibt sich ein Unterschied von über 5 DM für den Durchschnittspreis eines Portefeuilles mit Einzellösung gegenüber einer Staffellösung. Mit verringertem Substitutionspotential verschiebt sich das durchschnittliche Niveau der Preise aller Portefeuilles nach oben, wenngleich die gerade beschriebenen Relationen bezüglich der Strukturen erhalten bleiben. Die in den Hypothesen (H.1) und (H.2) formulierten Vermutungen werden dadurch gestützt.

Betrachtet man die hier nicht tabellierte Anzahl von Dominanzen, so ergibt sich, daß im Falle einer Staffellösung ganz überwiegend $D < 0$ gilt, das Substitutionsportefeuille also die Anleihe dominiert. In weniger als 15 % der Staffelstrukturen ist die Relation umgekehrt. Hypothese (H.2) kann damit nicht widerlegt werden. Auch Konfigurationen, die einer solchen Staffellösung nahekommen, also beispielsweise nur eine Lücke aufweisen, zeigen ein ähnlich gelagertes Auftreten. Diese sind hier wegen der großen Zahl der verbliebenen Varianten jedoch unter den Sonstigen erfaßt.

Fast spiegelverkehrt liegt der Fall bei Einzellösungen. Hier gilt $D > 0$ in über 80 % der Fälle. Die in Hypothese (H.1) formulierte Vermutung wird dadurch gestützt. Einzellösungen treten vor allem dann auf, wenn das Substitutionspotential keine Anleihe mit Fälligkeit im Schlußintervall $]I_T]$ bietet („Verkürzung“) oder wenn es eine Anleihe mit sehr niedrigem Kupon zu duplizieren gilt.

Die Strukturen in den Sonstigen wurden während der Untersuchung zwar detailliert aufgeschlüsselt, jedoch hier nicht explizit ausgewiesen, da die zahlreichen Varianten zu einer geringen Anzahl bei jeder Variante führten und daher wenig aussagefähig erscheinen. Insgesamt ergaben sich 45 Strukturvarianten in den 1620 betrachteten Fällen. Zu beobachten war aber die erwartete Zunahme des Wertes von D bei Strukturen mit wachsendem Kassenhaltungsvolumen. So ergab sich für die 82 Fälle einer „verkürzten“ Staffellösung, bei der also im Schlußintervall keine Anleihe fällig wurde, bereits ein Wert von +3,20 DM für D.

Als Überhanglösungen ergaben sich allein die sechs Fälle der Substitution einer 7,5%-Postanleihe (fällig 1.2.1981) am 31.7.1978 aus DM-Euroanleihen für die sechs hier üblichen Steuersätze. Tatsächlich existierten nur Anleihen mit einem Kupontermin zwischen dem 31.7. und 1.2., die nach dem 1.2.1981 fällig wurden, so daß eine Überhanglösung erzwungen wurde. In allen sechs Fällen ergab sich für das Substitutionsportefeuille ein deutlich höherer Preis als für die Postanleihe.

Tabelle 8 hat gezeigt, daß sich die Strukturausprägungen auf Einzel- und Staffellösungen konzentrieren. Nimmt man zu den Einzellösungen die Triviallösungen hinzu und addiert zu den Staffellösungen auch diejenigen mit nur einfachen Defekten, so finden sich hier etwa zwei Drittel aller Substitutionsportefeuilles. Innerhalb der oben aufgeführten Gruppen zeigt sich überall, daß die Häufigkeit einer Variante mit dem Umfang der darin enthaltenen Defekte abnimmt. Beispielsweise existieren in der Gruppe der mittigen Lücken 56 Fälle mit einer einzelnen fehlenden Anleihe, 22 mit zwei, zwölf mit drei und fünf mit vier unbesetzten, inneren Intervallen.

Der methodische Kuponeffekt beruht auf der *Relation der zur Verfügung stehenden Kuponhöhen*. In Abhängigkeit der Kuponhöhe C der Referenzanleihe wird daher das Auftreten der diskutierten Lösungsstrukturen aufgeschlüsselt.

Tabelle 11: Verteilung der Lösungsstrukturen nach der Kuponhöhe der Referenzanleihe A_0

Kupon:	$C < 4$	$4 \leq C < 5$	$5 \leq C < 6$	$6 \leq C < 7$
Einzellösung	245	17	99	138
Staffellösung	20	0	14	9
Sonstige	113	1	67	105

Kupon:	$7 \leq C < 8$	$8 \leq C < 9$	$9 \leq C < 10$	$C \geq 10$
Einzellösung	23	15	10	20
Staffellösung	91	72	92	153
Sonstige	48	57	42	169

Es zeigt sich ein deutliches Übergewicht im Auftreten von Einzellösungen im Bereich der Niedrigkuponanleihen. Staffellösungen finden sich im Gegensatz dazu vor allem bei Referenzanleihen mit hohem Kupon. Sie können jedoch, wenn auch selten, bei Niedrigkuponanleihen auftreten, falls eine Anleihe mit noch niedrigerem Kupon zur Verfügung steht. Der Rest der Staffel (A_i mit $i > 1$) unterliegt der Kuponproblematik nicht.

Die Sonstigen konzentrieren sich die Referenzanleihen auf den oberen Kuponbereich, da darin vor allem lückenhafte Staffellösungen enthalten sind. Die hohe Zahl der Sonstigen in der niedrigsten Kuponklasse rührt von „gespreizten" Zweierlösungen her, bei denen eine Einzellösung wegen des ersten Kupontermins durch eine deutlich kürzerlaufende Anleihe ergänzt werden muß.

Ausgewertet wurde ferner, inwieweit das Substitutionsportefeuille Anleihen mit gleichem, höherem oder niedrigerem Kupon als A_0 enthielt. Dabei wurde allein die

Kupon*höhe* betrachtet, die Restlaufzeiten wurden ignoriert. In der folgenden Tabelle sind die gefundenen Kombinationen erfaßt:

Tabelle 12: Relative Kuponhöhen von Substitutionsanleihen

Relation	Anzahl
$C_i > C_0 \quad , \quad i = 1,\ldots,z$	598
$C_i < C_0 \quad , \quad i = 1,\ldots,z$	413
$C_i = C_0 \quad , \quad i = 1,\ldots,z$	71
$C_i \geq C_0 \quad , \quad i = 1,\ldots,z \quad , \quad z \geq 2$	0
$C_i \leq C_0 \quad , \quad i = 1,\ldots,z \quad , \quad z \geq 2$	76
$(\exists C_i \mid C_i < C_0) \wedge (\exists C_i \mid C_i > C_0) \wedge (z \geq 2)$	462

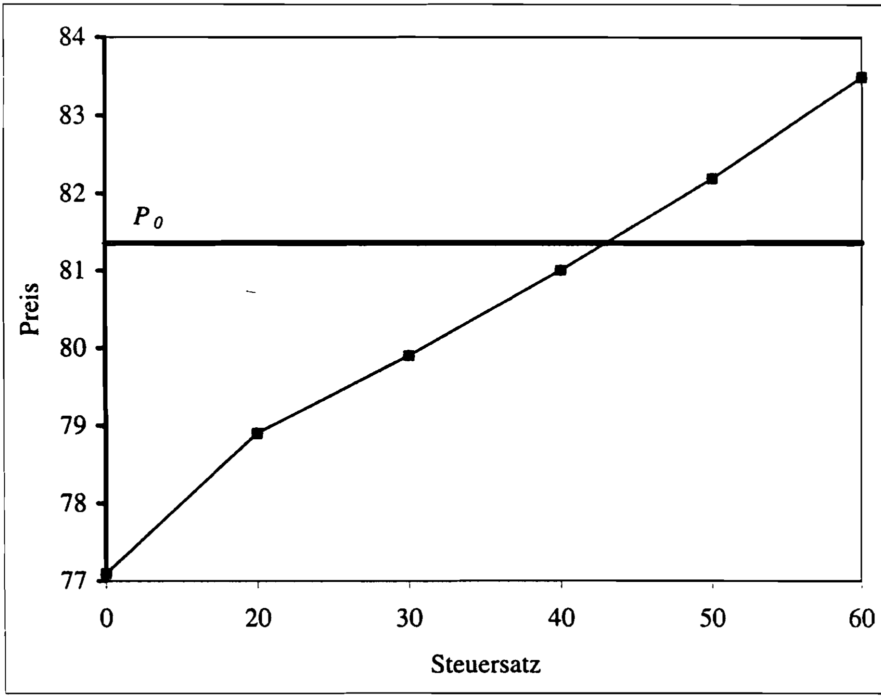
Bemerkenswert ist die Nichtexistenz von Substitutionsportefeuilles, die nur größere *und* gleich hohe Kupons enthalten. Diese Beobachtung beruht auf dem Problem der Substitution von Anleihen mit den minimalen Kupons in einer Restlaufzeitklasse. Der hohe Anteil an ausschließlich größeren Kupons zeigt den Ausweg. Selbst bei Vorhandensein einer Anleihe mit einem gleich hohen Kupon gelangt entweder nur diese (Einzellösung mit identischem Kupon, gegebenenfalls Triviallösung) in das Substitutionsportefeuille oder eine andere Anleihe mit höherem Kupon, nicht aber beide. Für die Bevorzugung von Lösungen mit geringem Mittelübertragungsvolumen spricht der überproportionale Anteil an Portefeuilles, die mindestens eine Anleihe mit einem niedrigeren Kupon enthalten. Insgesamt handelt es sich dabei um 951 von 1620 Fällen. Der Einfluß des methodischen Kuponeffektes in Form einer Benachteiligung von Substitutionsportefeuilles für Niedrigkuponanleihen durch überproportionales Auftreten von Einzellösungen in dieser Gruppe tritt deutlich hervor.

5.2 Analyse von einzelnen Substitutionsportefeuilles

Anhand von ausgewählten Einzelfällen sollen die analytisch diskutierten Grundfälle von Lösungsstrukturen im folgenden auch empirisch demonstriert werden. In den folgenden Abbildungen ist auf der Abszisse der Steuersatz der Anleger abgetragen. Auf der Ordinate befindet sich die Preisskala, wobei der Marktpreis P_0 der Referenzanleihe durch einen fetten Querstrich kenntlich gemacht ist. Die für die Preis-Steuersatz-Funktion ermittelten diskreten Werte sind durch Zeichen markiert und hier nur zur Veranschaulichung optisch verbunden. Der senkrechte Abstand zwischen der Markierung und der Linie für P_0 entspricht der Differenz D.

Abbildung 1 zeigt einen typischen Fall für eine Einzellösung, wobei der Graph der Preis-Steuersatz-Funktion steigend verläuft und die Linie des Marktpreises der Referenzanleihe schneidet.

Abbildung 1: Beispiel für eine Einzellösung (Stichtag: 31.7.1979, 3,5 % Commerzbank International Finance, fällig 1.7.1988)



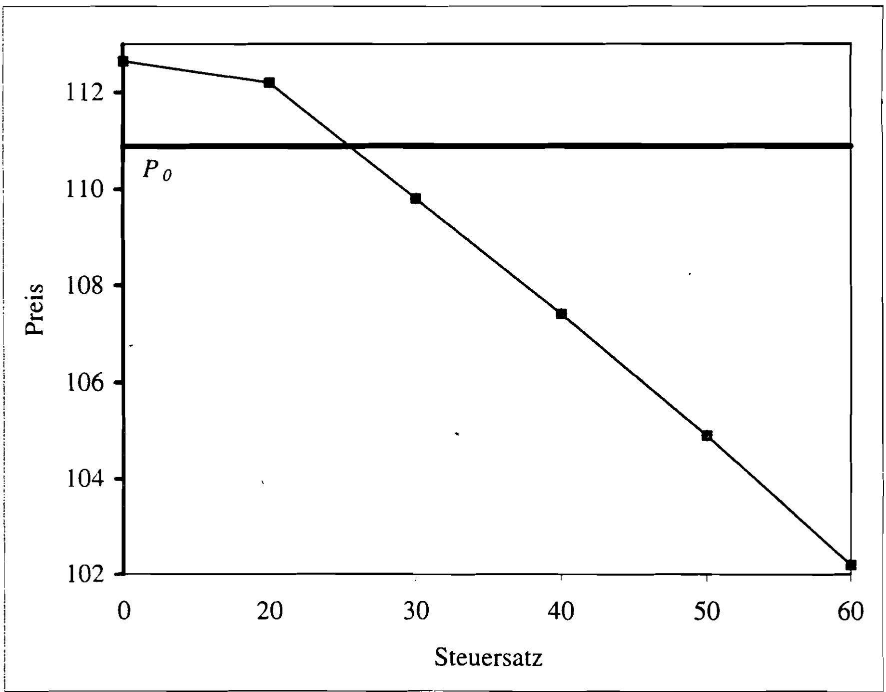
In der Abbildung 1 sind nur diejenigen Substitutionsportefeuilles eingetragen, die sich aus dem Gesamtbestand der DM-Inlands- und DM-Euroanleihen ergeben. An diesem Stichtag standen damit 123 Anleihen zur Verfügung. Die ausgewählte Anleihe A_0 stellte zu diesem Zeitpunkt auch diejenige mit dem minimalen Kupon dar. Folglich am es zu einer Einzellösung mit höherem Kupon. Die Kongruenz der Zahlungsströme wird hergestellt, indem die Substitutionsanleihe A_l in einer Stückzahl kleiner als eins erworben wird und die in jedem Kupontermin vor Fälligkeit anfallenden Zahlungsüberschüsse auf den Fälligkeitszeitpunkt vorgetragen werden. Mit steigendem Steuersatz nimmt die zu erwerbende Stückzahl von A_l zu, wie folgende Tabelle zeigt:

Tabelle 13: Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles in Abbildung 1
(Substitutionspotential: DM-Inlandsmarkt)

s	x_i	Substitutionsanleihen	Fälligkeit
0 %	0,8539	6 % Bahn	01.07.1988
20 %	0,8741	6 % Bahn	01.07.1988
30 %	0,8854	6 % Bahn	01.07.1988
40 %	0,8976	6 % Bahn	01.07.1988
50 %	0,9108	6 % Bahn	01.07.1988
60 %	0,9251	6 % Bahn	01.07.1988

In der Konsequenz steigt auch der Preis des Substitutionsportefeuilles, wie in Abbildung 1 zu erkennen ist. Wegen der Terminkongruenz von A_0 und A_1 entstehen nur relativ geringe Kassenhaltungsbeträge, und das Substitutionsportefeuille zeigt erst für hohe Steuersätze einen höheren Preis als die ersetzte Anleihe.

Abbildung 2: Beispiel für Doppel- und Staffellösungen
(Stichtag: 31.7.1987, 7,25 % KfW, fällig 15.11.1994)



In diesem Fall ist A_0 noch nicht die Anleihe mit dem maximalen Kupon, notiert aber bereits deutlich über pari (Kurs: 105,00). In Abbildung 2 sind nur diejenigen Substitutionsportefeuilles eingetragen, die sich allein aus DM-Inlandsanleihen bilden ließen. Die Substitution findet hier also innerhalb desselben Marktsegmentes statt. Dieser Fall zeigt zugleich beispielhaft die Möglichkeiten der Doppel- und der Staffellösung. Die Anleihe mit der längsten und regelmäßig mit der von A_0 übereinstimmenden Restlaufzeit muß dann einen kleineren Kupon als A_0 besitzen. In der folgenden Tabelle 14 zeigt sich sowohl die qualitative wie quantitative Änderung in der Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles.

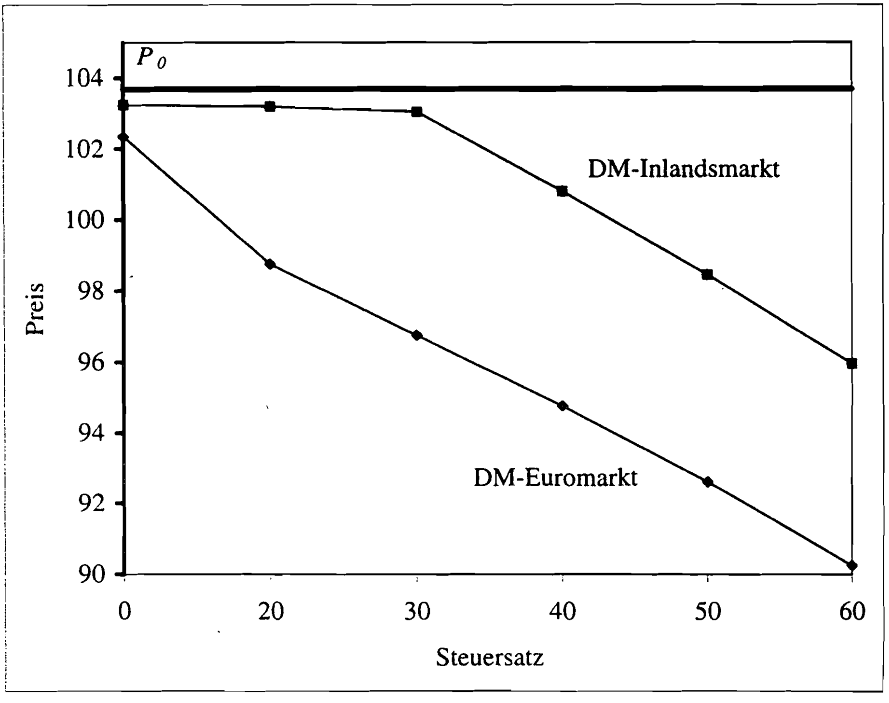
Tabelle 14: Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles aus Abbildung 2 (Substitutionspotential: Gesamtmarkt)

s	x_i	Substitutionsanleihen	Fälligkeit
0 %	0,2716	3,25 % Bayer AG	15.03.1994
	0,9667	7,50 % Bund	20.10.1994
20 %	1,0312	3,25 % Bayer AG	15.03.1994
	0,0296	6,75 % KfW	15.11.1993
	0,0277	8,75 % Bund	01.02.1992 (*)
	0,0264	5,75 % Bundesobligation	21.10.1991 (**)
	0,0252	6,25 % Bundesobligation	20.09.1990
	0,0238	7,00 % Bundesobligation	20.10.1989
	0,0203	6,25 % Hessen	01.10.1988
	0,0542	7,75 % Bundesobligation	01.11.1987 (*)
30 %	...	...	...
40 %	...	...	...
50 %	...	...	...
60 %	1,0158	3,25 % Bayer AG	15.03.1994
	0,0154	6,75 % KfW	15.11.1993
	0,0151	5,00 % Bundesobligation	21.04.1992
	0,0148	5,25 % Bundesobligation	20.09.1991
	0,0144	6,25 % Bundesobligation	20.09.1990
	0,0140	7,00 % Bundesobligation	20.10.1989
	0,0062	6,25 % Hessen	01.10.1988
	0,0533	6,00 % Bahn	01.09.1987

In allen sechs Substitutionsportefeuilles wird die Duplikation der jeweiligen Zahlungsreihen mit nur geringen Kassenhaltungsvolumina erreicht. Mittelvorträge sind allein deshalb notwendig, weil die Zahlungstermine nicht tagesgenau übereinstimmen und die Rückflüsse der stets früher zahlenden Substitutionsanleihen durch Vorwärtsschieben angepaßt werden müssen. Größere Schwierigkeiten ergeben sich hier nicht, da sich im Substitutionspotential genügend Anleihen finden, deren Fälligkeiten nicht mehr als ein Jahr auseinander liegen und die daher in der Fälligkeitsstaffel des Substitutionsportefeuilles keine Lücke entstehen lassen.

Man erkennt, daß bei den Staffelkombinationen die zu erwerbenden Stückzahlen mit der Restlaufzeit steigen, absolut gesehen mit zunehmendem Steuersatz aber sinken. Die Anleihe mit der längsten Restlaufzeit stellt den weitaus größten Anteil am Substitutionsportefeuille. Abweichungen ergeben sich nur bei der kürzesten Restlaufzeit wegen der Verrechnung von Stückzinsen mit dem ersten Kupon. Diese Feststellungen gelten auch für die hier nicht explizit aufgeführten Portefeuilles für die Steuersätze s = 30, 40 und 50 %, die denen für s = 20 % und s = 60 % sehr ähnlich sind. Neben der gerade beschriebenen quantitativen Verschiebung von Stückzahlen kommt es mit steigendem Steuersatz auch zu einer qualitativen Veränderung in der Zusammensetzung: Die Anleihen mit Kupons größer als C_0 [markiert mit (*)] werden durch Anleihen mit niedrigeren Kupons ersetzt. Daneben findet in einem Fall auch bei einem ohnehin niedrigeren Kupon ein Austausch der Anleihe gegen eine andere mit noch niedrigerem Kupon statt [Markierung:(**)].

Abbildung 3: Beispiel für eine verkürzte Lösung (Stichtag: 29.7.1983, 6 % Bahn, fällig 1.2.1990)



In der Abbildung 3 zeigt sich der Fall der Inferiorität der Anleihe A_0 für alle Steuersätze. In dieser selten aufgetretenen Konstellation besitzt das Substitutionsportefeuille für alle Steuersätze und alle Substitutionspotentiale einen geringeren Preis als die Anleihe selbst. Der Fall wurde hier auch deshalb ausgewählt, weil sich daran weitere Varianten von Lösungsstrukturen demonstrieren lassen.

Tabelle 15: Zusammensetzung von Substitutionsportefeuilles aus Abbildung 3

(Substitutionspotential: DM-Inlandsmarkt)

s	x_i	Substitutionsanleihen	Fälligkeit
0 %	1,0000	6,375 % KfW	15.01.1996
20 %	...	...	...
30 %	...	...	...
40 %	...	...	...
50 %	...	...	...
60 %	1,0385	3,00 % BASF	02.01.1995 (**)
	0,0127	6,75 % KfW	15.11.1993 (*)
	0,0124	5,00 % Bundesobligation	21.04.1992 (*)
	0,0122	5,25 % Bundesobligation	20.09.1991 (*)
	0,0119	6,25 % Bundesobligation	21.01.1991
	0,0116	6,00 % Bahn	01.02.1990
	0,0112	6,25 % Hessen	01.10.1988 (*)
	0,0176	6,00 % Bund	01.01.1988

Bei einem Steuersatz von s = 0 % besteht das Substitutionsportefeuille allein aus einer Anleihe, die den gleichen Kupon und nur eine geringfügig kürzere Restlaufzeit aufweist, so daß praktisch vollständige Substitute vorliegen. Das Substitutionsportefeuille bei s = 60 % besteht wiederum aus einer Staffellösung, wobei die Jahreszahlen nur scheinbar unregelmäßig auftreten, da wegen des sehr früh im Kalenderjahr liegenden Zahlungstages von A_0 die jeweilige Substitutionsanleihe teilweise schon im vorangehenden Kalenderjahr fällig wird (*). Im Unterschied zu Tabelle 12 fehlt nun jedoch die längste Restlaufzeit, die Staffel ist verkürzt (**). Für diese Restlaufzeit wurde keine Anleihe notiert, die einen adäquaten steuerfreien Kursgewinn erbringen könnte, so daß es für den steuerlich hoch belasteten Anleger sinnvoll ist, die kürzerlaufende Anleihe (3,00 % BA) in vergrößertem Umfang zu erwerben und die überschüssigen Mittel in Kasse vorzutragen.

Werden für die Anleihe in obiger Abbildung 3 zur Substitution nur Anleihen des aus Sicht von A_0 komplementären Segments, hier des DM-Euromarktes, zugelassen, treten wiederum Unterschiede auf:

Tabelle 16: Zusammensetzung von Substitutionsportefeuilles aus Abbildung 3

(Substitutionspotential: DM-Euromarkt)

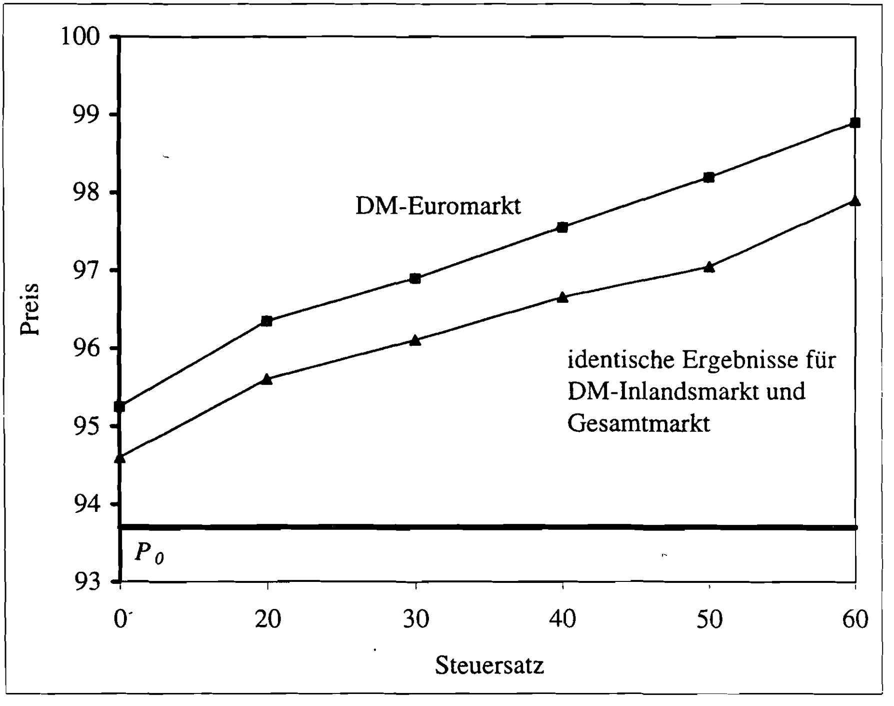
s	x_i	Substitutionsanleihen	Fälligkeit
0 %	1,0000	6,375 % Europ. Inv. Bank	01.02.1996
20 %	...	...	...
30 %	...	...	...
40 %	...	...	...
50 %	...	...	...
60 %	1,0133	3,00 % VW Internat. Fin.	09.01.1996
	0,0130	6,25 % Deutsche Bank Fin.	30.01.1995
	0,0127	5,75 % Cobank Overs. Fin.	24.09.1993
	0,0251	3,00 % Union Bank Switz.	15.12.1991 (*)
	0,0122	4,00 % Credit Suisse Fin.	31.07.1990
	0,0241	3,50 % Cobank Intern. Fin.	01.07.1988 (*)
	0,0196	6,00 % Dänemark	01.02.1988

Im Falle des steuerfreien Anlegers enthält das Substitutionsportefeuille eine Anleihe mit identischen Konditionen und wird insofern zu einer Triviallösung. Im Substitutionsportefeuille für den mit s = 60 % Steuersatz belasteten Anleger zeigen sich zwei Lücken, die dadurch geschlossen werden, daß die jeweils vorher fälligen Substitutionsanleihen (*) in praktisch doppelt so großem Umfang wie bei vollständiger Staffel erworben werden und durch Kassenhaltung auch die nächstfolgende Zahlung mitabdecken.

Die Preisdifferenz D zwischen dem Preis des Portefeuilles und dem der Anleihe nimmt gerade in Abbildung 3 beträchtliche Ausmaße an. Bei einem Steuersatz von s = 60 % zeigt das aus dem Gesamtmarkt gebildete Substitutionsportefeuille einen Preis von P_{SP} = 90,10 gegenüber einem Marktpreis der Anleihe von P_0 = 103,69. Dieser Unterschied von über 13 Prozentpunkten für ein Stück von 100 DM erscheint auch insofern überraschend hoch, als die Anleihe nahe bei pari notiert und damit für Anleger mit hohem Steuersatz nicht a priori als unvorteilhaft eingeschätzt werden kann. Der Betrag von D ist wegen Leerverkaufsbeschränkungen nicht als realisierbarer Arbitragegewinn interpretierbar, stellt aber Opportunitätskosten dar, die einem entsprechenden Anleger entstehen, falls er eine Fehlentscheidung für den Erwerb dieser Anleihe trifft.

Bei Zulassen des Gesamtmarktes als Substitutionspotential ergeben sich geringfügige Preissenkungen für die jeweiligen Substitutionsportefeuilles, wie aus dem knapp unterhalb von $P^A(s)$ verlaufenden Graphen für $P^G(s)$ zu erkennen ist. Man erkennt am Verlauf der Graphen dabei auch, daß Substitutionsportefeuilles bei Verwendung des Gesamtbestandes als Substitutionspotential an einem Stichtag c. p. nicht höhere Preise zeigen können als bei Verwendung einer Untermenge. Die ausgedehnteren Substitutionsmöglichkeiten zeigen sich auch darin, daß für alle Steuersätze eine vollständige Staffellösung als Struktur entsteht. Da sich prinzipiell dasselbe Bild zeigt wie in Tabelle 14, wird hier auf eine detaillierte Darstellung verzichtet.

Abbildung 4: Beispiel für Strukturwechsel (Stichtag: 31.7.1987, 6,375 % Bahn, fällig 1.2.1996)



In diesem Diagramm sind alle Substitutionsportefeuilles eingetragen, die an diesem Stichtag zur Duplikation von A_0 gebildet wurden. Der obere Graph zeigt die Portefeuilles, die ausschließlich aus DM-Euroanleihen bestehen, der untere Graph verbindet die Portefeuilles, die allein aus dem DM-Inlandsmarkt beziehungsweise aus dem Gesamtmarkt gebildet wurden. In diesem Falle ergaben sich für den Inlandsmarkt identische Lösungen wie für den Gesamtmarkt.

Tabelle 17: Zusammensetzung der Substitutionsportefeuilles aus Abbildung 4 (Substitutionspotential: DM-Inlands- oder Gesamtmarkt; identische Ergebnisse)

s	x_i	Substitutionsanleihen	Fälligkeit
0 %	0,9206	6,75 % Bund	01.01.1990
20 %	0,9300	6,75 % Bund	01.01.1990
30 %	0,9352	6,75 % Bund	01.01.1990
40 %	0,9408	6,75 % Bund	01.01.1990
50 %	0,9468	6,75 % Bund	01.01.1990
60 %	0,7223	6,75 % Bund	01.01.1990
	0,2465	6,50 % Bahn	01.05.1989

Der Umfang der von A_I zu erwerbenden Stücke nimmt wieder mit steigendem Steuersatz zu. Bei einer Steuerbelastung von $s = 60$ % ergibt sich eine Ergänzung des bis dahin uniformen Substitutionsportefeuilles durch eine weitere, ebenfalls mit höherem Kupon als A_0 ausgestattete Anleihe, die eine fast identische Restlaufzeit aufweist. Bemerkenswert ist, daß A_0 für alle Steuersätze und Substitutionspotentiale dominiert wird. Die Anleihe kommt damit *für keine Anlegergruppe* in Frage. Dieses seltene Phänomen ist an anderer Stelle bereits diskutiert worden.[36]

Sämtlich auftretenden Verläufe der Preis-Steuersatz-Funktion sowie alle Grundmuster von Lösungsstrukturen sind damit gezeigt und analysiert worden. Damit konnte auch empirisch belegt werden, daß bei *konstanter* Struktur des Substitutionsportefeuilles in bestimmten Fällen ein monotoner Verlauf der Preis-Steuersatz-Funktion entsteht. Die Art der Struktur wirkt zudem auf das Lageniveau der Funktion ein.

6. Zusammenfassung

Die vorliegende Studie ist der Problematik der Bildung von Substitutionsportefeuilles gewidmet. Ziel ist zum einen die systematische theoretische Diskussion aller denkbaren Lösungsstrukturen und zum anderen deren empirische Untersuchung durch Offenlegen tatsächlich ermittelter Substitutionsportefeuilles. Als wichtigster Punkt ergibt sich das Auftreten eines bislang unbeachtet gebliebenen *methodischen Kuponeffektes*. Dieses Phänomen zeigt teilweise Überschneidungen mit dem steuerlichen Kuponeffekt, ohne daß sich beide Einflüsse exakt separieren lassen.

36 Vgl. BÜHLER/RASCH (1994), S. 26.

Die Bildung eines Substitutionsportefeuilles führt zu bestimmten Lösungsstrukturen, die sich auf wenige Grundmuster reduzieren lassen. Wichtig sind insbesondere die beiden Randfälle der hier sogenannten Einzellösung und Staffellösung. Es läßt sich zeigen, daß Einzellösungen vor allem bei Niedrigkuponanleihen auftreten und infolge des methodischen Kuponeffektes tendenziell erhöhte Preise besitzen. Staffellösungen treten dagegen eher bei Hochkuponanleihen auf und erfahren diese Benachteiligung nicht. Damit werden Substitutionsportefeuilles für Niedrigkuponanleihen häufiger höhere Preise gegenüber der Referenzanleihe zeigen.

Der Schlüssel zur Eliminierung dieser methodischen Asymmetrie liegt in einer analytischen Bestimmung des Einflusses nichtlinearer Matrix-Operationen auf die Zusammensetzung der Basisvariablen in der dualen Lösung eines linearen Programms. Für den allgemeinen Fall ist dieses mathematische Problem nach wie vor ungelöst. Hier kann jedoch für die beiden im Zusammenhang mit der Untersuchung von Steuer-Klientel-Effekten entscheidenden *Randfälle* eine *analytische Lösung* gezeigt werden. Mit steigendem Steuersatz wächst der Preis eines Substitutionsportefeuilles bei konstant vorliegender Einzellösung und fällt für eine Staffellösung. Dies gilt auch bei Auftreten innerer „Lücken“. Für „verkürzte“ oder „verzögerte“ Staffeln kann keine klare Aussage getroffen werden. Daneben existieren noch zwei Sonderfälle. Somit ist zugleich eine *Systematisierung aller möglichen Lösungsstrukturen* vorgenommen worden.

Die diskutierten Fälle von Lösungsstrukturen können außerdem empirisch gezeigt werden. Es ergeben sich zahlreiche Varianten, jedoch mit großen Unterschieden in der Häufigkeit des Auftretens. Überwiegend zeigen sich die beiden Grenzfälle von Einzel- beziehungsweise Staffellösungen. Der daraus demonstrierbare methodische Kuponeffekt repräsentiert die Einflüsse der Strukturen von Substitutionsportefeuilles auf den Verlauf der Preis-Steuersatz-Funktion. Substitutionsportefeuilles für relativ niedrigverzinsliche Anleihen zeigen die vermuteten Benachteiligungen in Form höherer Einstandspreise. Hier *überlagern sich* in der empirischen Analyse *methodisch bedingte und steuerlich bedingte Effekte.*

Detaillierte Analysen von Einzelbeispielen lassen Rückschlüsse auf das vorhandene Substitutionspotential zu, das die Kombinationsmöglichkeiten begrenzt. Erstmalig wird damit *explizit die Zusammensetzung von Substitutionsportefeuilles analysiert und systematisiert.* Es ergeben sich Erkenntnisse über die Anzahl der im Substitutionsportefeuille enthaltenen Anleihen sowie über die daraus folgenden Zusammenhänge zwischen deren Kuponhöhe, Restlaufzeit sowie Stückzahl und dem Preis des Portefeuilles.

In der Konsequenz stellen sich einige Fälle von vermeintlichen Dominanzen und daraus erklärten Steuer-Klientel-Effekten als rechentechnische Abhängigkeiten dar. Steuerliche Einflüsse sind zwar vielfach real vorhanden, in bestimmten Fällen jedoch auf Grund von Kuponrelationen nur Illusion. Insofern ist auf Grund der hier angestellten Überlegungen bei der Verwendung von Substitutionsportefeuilles grundsätzlich zu prüfen, ob die errechneten Ergebnisse *Preiseffekte des Marktes* oder *Kombinationsrestriktionen* abbilden. Die in diesem Beitrag ermittelten Resultate erklären wesentlich die überraschenden *Asymmetrien in den Ergebnissen der empirischen Untersuchungen zu Steuer-Klientel-Effekten.*

Anhang

Beweis von Relation (38):

$$\text{z. z.:} \quad \frac{dx_1}{ds} < 0 \tag{38}$$

Für Staffellösungen ergibt sich x_1 gemäß Gleichung (37) zu

$$x_1 = \frac{100 + (1-s) \cdot C_0}{100 + (1-s) \cdot C_1} = \frac{C_0 - s \cdot C_0 + 100}{C_1 - s \cdot C_1 + 100}. \tag{55}$$

Die Ableitung von x_1 nach s lautet nach Quotientenregel

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{(-C_0) \cdot (C_1 - s \cdot C_1 + 100) - (-C_1) \cdot (C_0 - s \cdot C_0 + 100)}{(C_1 - s \cdot C_1 + 100)^2}. \tag{56}$$

Über das Vorzeichen dieses Ausdrucks entscheidet allein der Zähler

$$-C_0 \; C_1 + s \cdot C_0 \; C_1 - 100 \cdot C_0 + C_0 \; C_1 - s \cdot C_0 \; C_1 + 100 \cdot C_1 \tag{57}$$

$$= 100 \cdot (C_1 - C_0) < 0. \tag{58}$$

q. e. d.

Beweis von Relation (40):

$$\text{z. z.:} \quad \frac{dx_2}{ds} < 0 \tag{40}$$

Aus Gleichung (39) ergibt sich

$$x_2 = \frac{(1-s) \cdot C_0 - (1-s) \cdot x_1 \ C_1}{100 + (1-s) \cdot C_2} = \frac{C_0 - s \cdot C_0 - x_1 \ C_1 + s \cdot x_1 \cdot C_1}{100 + C_2 - s \cdot C_2}. \tag{59}$$

Die Ableitung gemäß Quotientenregel lautet

$$\frac{dx_2}{ds} = \frac{(-C_0 + x_1 \cdot C_1)(100 + C_2 - s \cdot C_2) - (-C_2) \cdot (C_0 - s \cdot C_0 - x_1 \ C_1 + s \cdot x_1 \ C_1)}{(100 + C_2 - s \cdot C_2)^2} \tag{60}$$

Das Vorzeichen der Ableitung wird durch den Zähler bestimmt, der sich nach Ausmultiplizieren der Klammern zusammenfassen läßt zu

$$100 \cdot (x_1 \cdot C_1 - C_0). \tag{61}$$

Einsetzen von Gleichung (37) für x_1 führt nach Zusammenfassung zu

$$10000 \cdot \frac{C_1 - C_0}{100 + (1-s) \cdot C_1}. \tag{62}$$

In diesem Ausdruck ist innerhalb des Bruchs der Nenner für positive Kupons C_i und Steuersätze s ebenfalls positiv, während der Zähler (C_1 - C_0) im Ausdruck (62) als negativ vorausgesetzt wurde. Damit wird auch der Zähler (61) der gesamten Ableitung und die Ableitung (60) selbst negativ.

q. e. d.

Beweis von Relation (42):

$$\text{z. z.:} \quad \frac{dx_k}{ds} < 0 \tag{42}$$

Aus der Stückzahl für den allgemeinen Fall *(i* = 2, ..., *k)*

$$x_k = \frac{(1-s)\cdot C_0 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i \;\; (1-s)\cdot C_i}{100 + (1-s)\cdot C_k} \tag{41}$$

ergibt sich die Ableitung

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{\left[-C_0 + \sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i \;\; C_i\right]\cdot\left[100+(1-s)\cdot C_k\right] - \left[(1-s)\cdot C_0 - (1-s)\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i \cdot C_i\right]\cdot\left(-C_k\right)}{\left[100+(1-s)\cdot C_k\right]^2}$$

(63)

Entscheidend für das Vorzeichen der Ableitung ist wiederum der Zähler, der sich nach Auflösung der Klammern und Zusammenfassung ergibt als

$$100\cdot\left[\sum_{i=1}^{k-1}\left(x_i \;\; C_i\right) - C_0\right]. \tag{64}$$

Der Beweis für den allgemeinen Fall von Ableitung (63) erfolgt über vollständige Induktion. Als Induktionsverankerung dient der oben gezeigte Fall von A_2. Für den Induktionsschluß wird

$$x_{k+1} = \frac{(1-s)\cdot C_0 - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \;\; (1-s)\cdot C_i}{100 + (1-s)\cdot C_{k+1}} \tag{65}$$

abgeleitet zu $\frac{dx_{k+1}}{ds}$

$$= \frac{\left[-C_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \;\; C_i\right]\cdot\left[100+(1-s)\cdot C_{k+1}\right] - \left[(1-s)\cdot C_0 - (1-s)\cdot \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot C_i\right]\cdot\left(-C_{k+1}\right)}{\left[100+(1-s)\cdot C_{k+1}\right]^2}$$

(66)

Für den Zähler ergibt sich hierzu analog zu Gleichung (64)

$$100\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i \;\; C_i\right) - C_0\right] \tag{67}$$

$$= 100\cdot\left(x_k \cdot C_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot C_i - C_0\right). \tag{68}$$

Durch das folgende Umordnen der Terme zu

$$(-100)\cdot\left[\left(C_0-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\ C_i\right)-x_k\ C_k\right] \tag{69}$$

erkennt man, daß das Vorzeichen des Zählers (69) und damit auch das der Ableitung (66) davon abhängt, ob die im Ausdruck (69) in runden Klammern stehende verbleibende Deckungslücke durch die aus A_k resultierende Kuponzahlung (x_kC_k) geschlossen wird. Dies ist jedoch nie der Fall, wie sich aus Formel (41) zeigen läßt:

$$x_k=\frac{(1-s)\cdot C_0-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\ (1-s)\cdot C_i}{100+(1-s)\cdot C_k} \tag{41}$$

$$=\frac{C_0-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\cdot C_i}{\frac{100}{1-s}+C_k} \tag{70}$$

$$\Leftrightarrow C_0-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\cdot C_i=x_k\cdot C_k+\frac{100}{1-s} \tag{71}$$

$$\Rightarrow C_0-\sum_{i=1}^{k-1}x_i\cdot C_i>x_k\cdot C_k\,. \tag{72}$$

Damit zeigt sich, daß die in einem Intervall $]t,\ t+1]$ jeweils verbleibende Deckungslücke bei Auffüllung mit einer Anleihe A_k mit der Restlaufzeit kleiner $(t+1)$ nicht vollständig geschlossen wird. Der Term in der eckigen Klammer in Ausdruck (69) wird also stets positiv und damit der Zähler (67) der Ableitung wie auch die gesamte Ableitung (66) negativ. Es gilt

$$\frac{dx_k}{ds}<0\,. \tag{42}$$

q. e. d.

Literaturverzeichnis

BÜHLER, WOLFGANG/RASCH, STEFFEN, (1994), Steuer-Klientel-Effekte an DM-Anleihemärkten, *ZEW Discussion Paper*, Nr. 94-09.

CAKS, JOHN, (1977), The Coupon Effect on Yield to Maturity, in: *The Journal of Finance*, 32, No. 1, March 1977, S. 103-115.

DERMODY, JAIME C./PRISMAN, ELIEZER Z., (1988), Term Structure Multiplicity and Clientele in Markets with Transaction Costs and Taxes, in: *The Journal of Finance*, 43, No. 4, September 1988, S. 893-911.

FRANKE, GÜNTER, (1983), Operative Steuerung der Geldanlage in festverzinslichen Wertpapieren, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Sonderheft 16, 1983, S. 49-71.

HODGES, STEWARD D./SCHAEFER, STEPHEN M., (1977), A Model for Bond Portfolio Improvement, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12, June 1977, S. 243-260.

JORDAN, BRADFORD D./JORDAN, SUSAN D., (1991), Tax Options and the Pricing of Treasury Bond Triplets, in: *Journal of Financial Economics*, 30, 1991, S. 135-164.

KATZ, ELIAKIM/PRISMAN, ELIEZER Z., (1991), Arbitrage, Clientele Effects, and the Term Structure of Interest Rates, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, No. 4, December 1991, S. 435-443.

KATZ, ELIAKIM/PRISMAN, ELIEZER Z., (1992), Taxation, the Term Structure of Interest Rates, and the Pattern of Bond Payments, Paper an der Faculty of Administrative Studies, York University, Toronto, 1992.

LASSAK, GÜNTER, (1992), Bewertung festverzinslicher Wertpapiere am deutschen Rentenmarkt, Heidelberg, 1992.

LITZENBERGER, ROBERT H./ROLFO, JACQUES, (1984a), Arbitrage Pricing, Transaction Costs, and Taxation of Capital Gains, in: *Journal of Financial Economics*, 13, 1984, S. 337-351.

LITZENBERGER, ROBERT H./ROLFO, JACQUES, (1984b), An International Study of Tax Effects on Government Bonds, in: *The Journal of Finance*, 39, No. 1, March 1984, S. 1-22.

LIVINGSTON, MILES, (1982), The Pricing of Municipal Bonds, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, No. 2, June 1982, S. 172-192.

PRISMAN, ELIEZER Z., (1990), A Unified Approach to Term Structure Estimation: A Methodology for Estimating the Term Structure in a Market with Frictions, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, 1990, S. 127-142.

RONN, EHUD I., (1987), A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, No. 4, December 1987, S. 439-466.

RONN, EHUD I./SHIN, YONGJAI, (1992), Tax Effects in U.S. Government Bond Markets: The Tax Reform Acts of 1984 and 1986, Paper auf dem 19th Annual Meeting of the European Finance Association, Lissabon, August 1992.

SAUER, ANDREAS, (1989), Arbitragemöglichkeiten am deutschen Rentenmarkt, Frankfurt am Main, 1989.

SCHAEFER, STEPHEN M., (1981), Measuring A Tax-specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities, in: *The Economic Journal*, 91, June 1981, S. 415-438.

SCHAEFER, STEPHEN M., (1982a), Tax-Induced Clientele Effects in the Market for British Government Securities, in: *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, S. 121-159.

SCHAEFER, STEPHEN M., (1982b), Taxes and Security Market Equilibrium, in: SHARPE/COOTNER: Financial Economics, Prentice Hall (Englewood Cliffs), 1982, S. 159-178.

UHLIR, HELMUT/STEINER, PETER, (1986), Wertpapieranalyse, Heidelberg, 1986.